RENDICONTO

DELL'ACCADEMIA

DELLE

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

(CLASSE DELLA SOCIETÀ REALE DI NAPOLI)

SERIE IV. — VOL. V. — (Anno LXXIV)

NAPOLI
S. I. E. M. - STABILIMENTO INDUSTRIE EDITORIALI MERIDIONALI
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE FIS. E MATEM.
S. Giovanni Maggiore Pignatelli, 2
1935-XIII

RENDICONTO

DELL'ACCADEMIA

DELLE

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

(CLASSE DELLA SOCIETÀ REALE DI NAPOLI)

SERIE IV. — VOL. V. — (Anno LXXIV)

Fascicoli 1 a 6 - Gennaio a Giugno 1935 (XIII)

NAPOLI
S. I. E. M. - STABILIMENTO INDUSTRIE EDITORIALI MERIDIONALI
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE FIS. E MATEM.
S. Giovanni Maggiore Pignatelli, 2
1935 - XIII

Pubblicato il dì 8 Giugno 1935 - XIII

RELAZIONE

SUI LAVORI COMPIUTI DALLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

DURANTE L'ANNO 1934

letta nell'adunanza del dì 9 febbraio 1935 (XIII)

dal socio segretario **Geremia D'Erasmo**

Ritenevo di non dover io, segretario uscente col finire del 1934, intrattenere l'Accademia sopra i lavori compiuti nello scorso anno; ma poichè il Commissario della Società Reale, che da circa dieci mesi accentra i poteri e le attribuzioni del Consiglio generale, ha voluto affidare all'antico Ufficio di Presidenza l'incarico di continuare, con le norme consuetudinarie, l'attività di questo Sodalizio, mi sia consentito di abusare, ancora una volta, della cortese pazienza dei Colleghi ricordando loro, per sommi capi, secondo le disposizioni del regolamento in vigore, quanto più di notevole ebbe a verificarsi nell'Accademia di Scienze fisiche e matematiche nel decorso anno 1934.

Una lieta e senza dubbio soddisfacente constatazione è quella di vedere, nella breve relazione di quest'attività, accanto ai nomi dei soci più anziani costantemente fedeli agli studi da lunghi anni con amore professati, quelli dei più giovani che, recentemente accolti nel nostro sodalizio, dànno ad esso il meglio delle loro spirituali energie, ed anche quelli di non pochi estranei, di cui l'Accademia accolse liberalmente, non ostante la scarsezza dei propri mezzi, note e memorie diverse.

Di questo fervore di ricerche, che anima ed accomuna i cultori delle nostre discipline scientifiche e che non è se non un riflesso del più generale e gagliardo spirito di rinascita di cui in ogni campo dà prova la nazione rinnovellata sotto i segni del Littorio, fanno chiara testimonianza i fascicoli del nostro Rendiconto e le nuove memorie accolte per la stampa nel volume XX degli Atti.

Cominciando dai lavori riguardanti le Scienze Matematiche, pure ed applicate, sono anzitutto da segnalare due note del socio senatore DEL PEZZO *Sull'esagono completo nel Quattrospazio* e *Sulle involuzioni piane e sul numero di Caporali*, una memoria del socio MARCOLONGO sopra *Il trattato di Leonardo da Vinci sulle trasformazioni dei solidi*, due note del socio SCORZA su *Le algebre nei corpi finiti dotate di modulo e commutative* e *Sulla riduzione a forma canonica*

di una classe speciale di matrici ed una memoria dello stesso autore sopra *Le algebre del III ordine.* Al socio corrispondente CACCIOPPOLI spetta una nota *Sui teoremi d'esistenza di Riemann*, e all'altro socio corrispondente ANDREOLI son dovute ben sette note accolte nel Rendiconto (*Sui sistemi chiusi di funzioni ortogonali ed un gruppo ad un parametro; Sulla definizione di certi indici, relativi a caratteri di omogamia, in problemi statistici; Sugli indici di omogamia, pura ed attenuata, e su certe interpretazioni iperspaziali; Sull'analisi dei fenomeni ciclici;* sugli *Indici di attrazione, di selezione, di omogamia nei fenomeni statistici; Sulla geometria piana Cayleyana e sulle metriche a forma quadratica indefinita;* sopra i *Fondamenti per una geometria delle varietà numeriche a due dimensioni).* Lo stesso consocio ANDREOLI ha pubblicato nei nostri Atti una memoria *Sulle funzioni di composizione di matrici.*

Fra i lavori presentati da estranei vanno ricordate due note del dott. G. ZIGARI *Sulle superficie del 3.° ordine;* quattro note del dott. G. BARBA *(Minimum di condizioni per un funzionale-lunghezza di curva; Ancora sulla definizione di lunghezza di una curva; Sui numeri complessi e su certi gruppi di trasformazioni quadratiche; Sostituzioni lineari pseudo-complesse);* due note del prof. E. LENZI *Sulla risoluzione numerica dell'equazione* $\sum_{1}^{n} ix^i = k$; due note del prof. M. GIOVANARDI *Sulla prospettiva della superficie di rotazione* e *Sulla prospettiva lineare conica di figure piane;* un lavoro dell'ing. G. DEL VECCHIO sulle *Proprietà fondamentali della deformazione pura infinitesima di un corpo continuo;* ed ancora una nota del dott. G. DE MEO *Su alcuni indici atti a misurare l'attrazione matrimoniale in classificazioni dicotome.* Vanno inoltre citate, nel medesimo campo, tre memorie accolte per la stampa negli Atti: una del prof. N. SPAMPINATO *Sulla geometria dello spazio rigato considerato come un S_4 ipercomplesso;* una del dott. A. COLUCCI *Sopra i polinomi definiti,* ed una dell' ing. F. JOSSA sopra *I muri ad angolo di cemento armato per sostegno delle terre.*

Passando alle ricerche chimiche e mineralogiche, sono da rilevare due note della dott. S. RESTAINO *Sulla composizione chimica di un diopside cilestrino dell' eruzione vesuviana del 1906* e *Contributo allo studio chimico di una roccia della Punta delle Pietre Nere (Foggia).* Nel campo più strettamente petrografico tre note del prof. F. PENTA hanno contribuito alla migliore conoscenza di alcune rocce ignee dell'Italia meridionale, e precisamente di quella detta « diabasica » in territorio di Frigento, e delle quarzodioriti di Nicotera, Palmi, Seminara e Bagnara. A ricerche di geologia e di paleontologia sono infine collegate una nota del socio D'ERASMO sopra *Il bradi-*

sismo di Paestum e una memoria dello stesso *Sopra alcuni avanzi di vertebrati fossili della Patagonia.*

Come negli anni precedenti, l'Accademia non ha mancato di interessarsi ai principali problemi attuali di scienza (tema per il convegno Volta della R. Accademia d'Italia, fondazione dell'Istituto Elettrotecnico Italiano ecc.) e di partecipare alle più importanti celebrazioni commemorative e manifestazioni culturali (primo centenario della nascita del botanico Federico Delpino; centenario della Edinburgh Geological Society; quinto centenario della fondazione della R. Università di Catania; onoranze ad Antonio Pacinotti; commemorazione di Torquato Taramelli ecc.).

Nel corso dell'anno 1934 sono scaduti due concorsi a premio. Per quello biennale accademico sul tema: *Contributo agli studi di cinetica chimica*, con unico concorrente, la Commissione ha proposto di assegnare il premio al lavoro manoscritto su *La decomposizione catalitica della nitrammide*, contraddistinto dal motto *Provando e riprovando.* Per quello Sementini, destinato ai cultori della Chimica applicata, la Commissione, su relazione della socia Bakunin, ha proposto di premiare, su due concorrenti, la dott. Teresa Maresca, autrice di una memoria manoscritta dal titolo *Ricerche sulla preparazione dell' acido fosforico.*

Vennero eletti soci corrispondenti il prof. Luigi Carnera nella sezione delle Scienze matematiche, e il prof. Carmelo Colamonico in quella delle Scienze naturali.

Una dolorosa perdita subì l'Accademia il 7 marzo scorso con la quasi improvvisa ed immatura morte del corrispondente prof. Gaetano Minunni, la cui opera nel campo della chimica organica appare chiaramente in tutto il suo valore — come giustamente ebbe a rilevare la socia Bakunin commemorandolo — a chiunque consideri, attraverso le numerose pubblicazioni di lui, la copia degli argomenti trattati e l'importanza delle questioni discusse e felicemente risolte.

Prima di chiudere questi brevi cenni sull' attività accademica del 1934, mi corre ancora l' obbligo di ricordare, che mercè un generoso sussidio del Consiglio di Amministrazione della R. Università di Napoli, opportunamente largito a complemento di quello già accordato dalla R. Accademia d'Italia nell'anno precedente, sta ormai per essere esaudito un antico voto degli studiosi di tutto il mondo, con la ristampa, curata dal nostro consocio prof. Quercigh e pressochè ultimata, dell' importante *Mineralogia vesuviana* di Ferruccio Zambonini: un grosso volume in 4°, ricco di circa 60 fogli di stampa e di un centinaio di figure intercalate.

Pur da questo scheletrico riassunto e dalle mie disadorne pa-

role emerge chiara l'importanza del lavoro compiuto nel decorso anno. L'aver atteso al proprio compito con la consueta alacrità e con l'antico amore può essere e sarà senza dubbio per tutti sprone ed incoraggiamento a perseverare e ad intensificare anzi per l'avvenire l'indagine scientifica, i cui progressi, se è vero che procurano le più pure soddisfazioni personali, contribuiscono altresì a tenere più alto il decoro dell'Accademia nostra ed insieme il prestigio della patria italiana.

Relazione sul concorso a premio AGOSTINO OGLIALORO TODARO

Per il concorso al «Premio Agostino Oglialoro Todaro» tra i laureati in Chimica pura dal 1° gennaio 1932 al 31 dicembre 1934, bandito il 20 giugno 1931 e scaduto il 4 gennaio 1935, sono pervenute due domande: l'una del Dr. Argentino Antonio e l'altra del Dr. De Gennaro Giovanni.

Entrambi nella sessione autunnale del 1934 hanno riportato alla laurea il massimo dei punti (110/110) ed hanno presentato una tesi originale.

Risulta dal certificato annesso che la media dei voti raggiunti negli esami speciali è di 26,6 per l'Argentino e di 25,9 per De Gennaro.

La vostra Commissione constata che entrambi i candidati sono meritevoli di lode e per la carriera scolastica e per l'esame di laurea sostenuto; ma non trova una notevole preminenza dell'uno rispetto all'altro. E pertanto vi propone di dividere la somma disponibile di lire mille in due premi di lire cinquecento ciascuno da assegnare ai due concorrenti.

La Commissione

E. Quercigh,
F. Giordani,
M. Bakunin, relatore.

Relazione della Commissione giudicatrice del concorso al premio accademico pel biennio 1933-34

approvata dall'Accademia nell'adunanza del dì 8 dicembre 1934 - XIII.

Al concorso bandito il 16 gennaio 1933 dalla nostra Accademia per conferire un premio di lire mille all' autore della migliore memoria sul tema:

« *Contributo agli studi di Cinetica Chimica* »

ha preso parte un solo concorrente con una memoria distinta dal motto: « *Provando e riprovando* » dal titolo: *Studio di Cinetica chimica. — La decomposizione catalittica della nitrammide.*

L'A. espone la nuova teoria avanzata dal Brönsted sugli acidi e sulle basi, secondo la quale ogni molecola neutra o ione che può può cedere un ione idrogeno è da considerarsi un acido, ed ogni molecola o ione che può addizionare un protone deve considerarsi una base.

Tale teoria è stata dal Brönsted confermata con ricerche eseguite sulla decomposizione della nitrammide; questi studi assumono perciò una importanza del tutto particolare nei riguardi della nuova teoria sulla basicità ed acidità delle sostanze.

A sussidio della ipotesi del Brönsted l'A. ha eseguito uno studio accurato sulla cinetica della decomposizione della nitrammide che avviene secondo lo schema seguente:

$$H_2N_2O_2 \longrightarrow N_2O + H_2O$$

La velocità di reazione è stata eseguita misurando, con un apparecchio appositamente costruito, il volume di ossidulo di azoto sviluppato. Dalle misure della velocità di decomposizione in soluzioni di acido cloridrico *N*/10, *N*/50, *N*/100, *N*/1000, risulta che la costante di velocità rimane inalterata, mentre che essa dovrebbe essere dipendente dalla concentrazione degli ioni idrogeno, secondo la vecchia teoria. Questi risultati sono in buon accordo con quelli ottenuti dal Brönsted.

Avendo eseguito delle analoghe esperienze con soluzioni di acido cloridrico *N*/50 in ambiente di soluzione satura di sali neutri (*NaCl* e *KCl*), si è constatato questo particolare comportamento: i valori delle costanti di velocità sono 0,270 per le soluzioni di *NaCl* e 0,430

per le soluzioni di *KCl*, rispetto a quelle misurate in soluzioni contenenti solo acido, prese come unità.

D'altra parte, però, il calcolo della energia di attivazione, la quale resta all'incirca costante in entrambi i casi, porta a concludere, che il meccanismo della reazione resta inalterato, pur variando la velocità.

Con questa esperienza, mentre si ha una conferma della teoria del BRÖNSTED nel caso della decomposizione in presenza di acidi, si rilevano alcuni caratteristici comportamenti nel caso dell'addizione di sali neutri nelle soluzioni acide di nitrammide, che ulteriormente confermati potranno meglio precisare il meccanismo della decomposizione.

Il lavoro, ricco di dati, condotto con acume ed accuratezza, è svolto sperimentalmente e concettualmente, così da soddisfare la vostra Commissione, che propone sia all'Autore della memoria assegnato il premio di lire mille.

Napoli, Novembre 1934 - XIII.

La Commissione

M. BAKUNIN
F. GIORDANI
E. QUERCIGH

Sulle metriche cayleyane delle V_2 ed una terza geometria non euclidea.

Nota del socio corrispondente **Giulio Andreoli**

(Adunanza del dì 5 gennaio 1935 - XIII)

Sunto. — L' A. sviluppa alcuni aspetti delle metriche cayleyane; specialmente quelli riguardanti la periodicità (o non) della punteggiata e quella (o non) del fascio.

Accenna ad una terza geometria non euclidea, ottenuta considerando l' esterno del cerchio, in una metrica cayleyana. In tale geometria vi sono tre specie di rette (euclidee, riemanniane, lobaceskiane).

1. Richiamando in modo breve le metriche cayleyane di una V_2 avente come sostegno un piano cartesiano, possiamo dire che esse sono caratterizzate dal seguente gruppo di fatti:

I. Una conica K fondamentale; i movimenti della geometria cayleyana sono le omografie che trasformano K in sè stessa.

II. Una metrica lineare, caratterizzata dall' espressione di distanza fra A e B

$$\overline{AB} = l \, . \, lg(ABPQ)$$

ove P, Q sono le intersezioni di $p \equiv (AB)$ con K.

III. Una metrica angolare, caratterizzata dall' espressione di angolo fra a e b

$$\widehat{a\,b} = \lambda \, lg \, (abpq)$$

ove p, q sono le tangenti condotte da $P \equiv (a, b)$ alla K.

Se la K è tangenzialmente degenere, occorre completare la definizione di distanza; ed esisteranno triangoli ad angoli eguali (i triangoli simili) non eguali, ma formanti (a meno di movimenti) una semplice infinità; e reciprocamente se K è puntualmente degenere esisteranno triangoli avente i tre lati ordinatamente eguali, ma non sovrapponibili.

Ciò accade nel primo caso per la geometria euclidea e per quella iperbolica speciale (relatività ad una dimensione).

D' altro canto le curve luogo di equidistanza di un punto A formano un fascio-schiera di coniche determinato dalla conica K e dalla polare a (di A rispetto a K) contata due volte; e reciprocamente le

curve inviluppo isocline rispetto alla retta a, formano lo stesso fascio schiera.

In un qualunque movimento generico, che lasci invariato un punto A (generico), vi è una retta che scorre su sè stessa: la a, e due punti e due rette (le intersezioni A_1, A_2 di a con K; le tangenti a_1 ed a_2 da A a K) che restano trasformati in sè stessi. I punti A_1, A_2 hanno da A *distanza indeterminata* le rette a_1, a_2 formano con a un angolo indeterminato. Così due punti generici di a_1, oppure di a_2 hanno distanza nulla; due rette generiche per A_1 oppure per A_2 hanno angolo nullo.

2. Si vede che *tutto* il comportamento della metrica lineare e di quella angolare è connesso (salvo il caso di conica degenere puntualmente o tangenzialmente) alle costanti l e λ.

Se i punti P e Q sono imaginari (coniugati) il birapporto $(ABPQ)$ risulterà il quoziente di due quantità complesse coniugate; quindi è una quantità complessa di modulo unitario; il suo logaritmo è un imaginario puro.

E se la distanza deve essere reale per A, B reali, l dovrà esser un imaginario puro; d'altro canto il logaritmo è definito a meno di multipli interi di $2\pi i$: dunque la distanza sarà definita a meno di multipli interi di $2l\pi$.

Questo è il caso dell'ellissi imaginario che corrisponde all'interpretazione cayleyana della metrica di Riemann.

Se i punti P e Q sono reali (prendendo per comodità il valore assoluto del birapporto invece del birapporto semplice) allora l sarà reale: tuttavia se il birapporto può assumere segno + o segno — vi saranno due zone di punti: nella prima i punti hanno fra loro distanza reale; nella seconda anche per passare dall'una all'altra occorre aumentare di $l\pi i$.

Questo è il caso della metrica di Lobaceski.

Se invece della distanza si considera l'angolo, valgono considerazioni analoghe: e quindi se le tangenti condotte da un punto sono complesse coniugate vale la proprietà dell'angolo periodico (λ risultando imaginario puro) e definito a meno di multipli di $2\lambda\pi$: tale è il caso della ellissi imaginaria (geometria di Riemann) o della conica reale nella quale i punti accessibili sono quelli dell'interno della conica (geometria di Lobaceski).

3. Si introducano ora coordinate plückeriane a fianco di quelle cartesiane; e si esamini il comportamento delle forme differenziali che si ottengono dalla espressione della distanza (in coordinate cartesiane) o dell'angolo (in coordinate plückeriane) allorchè si considerino punti o rette di coordinate differenti per infinitesimi di I° ordine (x, y) ed $(x+dx, y+dy)$; (u, v) ed $(u+du, v+dv)$.

Si avranno rispettivamente come quadrato dell'elemento d'arco di curva luogo e come quadrato dell'elemento d'angolo di curva inviluppo due forme differenziali quadratiche, rispettivamente nelle coordinate cartesiane o plückeriane.

Se la K fosse tangenzialmente degenere, la forma quadratica angolare diventa un quadrato esatto; se fosse puntualmente degenere lo sarebbe invece quella distanziale.

Dal punto di vista della misura delle distanze e degli angoli si vede che esistono e per le une e per le altre queste due alternative.

a) lunghezza o angolo definiti a meno di multipli interi di una quantità fondamentale; non esistono enti reali a distanza o angolo nullo:

b) lunghezza o angolo definiti senza periodo; esistono enti reali a distanza o angolo nullo.

La prima alternativa implica la periodicità della punteggiata o del fascio rispettivamente; la seconda implica la separazione della punteggiata o del fascio in due zone reciprocamente irraggiungibili l'una dall'altra.

4. Esaminando le geometrie possibili si hanno allora le alternative (lettere latine, lunghezze; greche, angoli)

$$a\alpha \ ; \ b\alpha \ ; \ \beta a \ ; \ b\beta.$$

La prima di esse conduce alla geometria di Riemann, come abbiamo visto; cioè lunghezza ed angolo periodici: conica K imaginaria.

La seconda di esse conduce alla geometria di Lobaceski: lunghezza non periodica, angolo periodico; si ha una conica K reale e si considera la sua regione interna come formata da punti raggiungibili; quella esterna da punti irraggiungibili e K come formata da punti impropri (a distanza infinita).

La terza alternativa è chiaramente la duale di quest'ultima: si scambiano le definizioni di lunghezza e di angolo.

Infine la quarta alternativa è quella nuova. In essa si considera una conica reale e si considerano come raggiungibili i *punti* esterni.

5. Vi sono allora tre tipi di rette: le non-secanti K, di cui due punti qualunque hanno sempre distanza finita (e quindi la retta è a lunghezza finita, periodica), tali rette *non* ammettono parallele; le tangenti a K, che hanno un solo punto improprio e per le quali da ogni punto del piano si può sempre condurre una ed una sola parallela; le secanti, che presentano una regione di punti irraggiungibili separata da quella dei punti raggiungibili da due punti impropri.

Cioè sono presenti, sullo stesso piano rette di tipo riemanniano; di tipo euclideo; di tipo lobaceskiano.

Quelle di tipo euclideo sono rette di distanza nulla, reali.

In quanto al fascio di direzioni spiccate da un punto, esso presenta i caratteri di non periodicità per le rotazioni attorno al suo centro: e viene diviso dalle due anzidette tangenti (rette euclidee; di distanza nulla) in due regioni rispettivamente formate dalle rette lobaceskiane e da quelle riemanniane.

Volendo postulare questa geometria, al classico postulato di EUCLIDE va sostituito l'altro:

Data una retta ed un punto fuori di essa, potrà condursi da questo punto nessuna, una, o infinite parallele alla retta data, e se una delle alternative si presenta per un certo punto, si presenterà per tutti gli altri; sempre riferendosi a quella retta.

6. Se si vuole completare questa geometria con un parallelismo ed un metrismo, occorre per il parallelismo (come dai citati lavori) definire un sistema di ∞^2 curve luogo autoparallele, tali che per due punti generici passi una sola di tali curve e che un fascio di raggi, trasportato lungo una di esse venga *sempre* riferito alla tangente a tale curva; restando invariato l'angolo di due generici raggi del fascio.

E per il metrismo, occorre dare invece un sistema ∞^2 curve-inviluppo di trasporto (a scivolamento nullo) tali che a due rette generiche sia tangente una sola di queste curve; o che una retta scivolando lungo una di esse, come tangente abbia sempre come origine della metrica su di essa retta il punto di contatto.

Ordinariamente le ∞^2 curve luogo autoparallele sono proprio le rette; e le ∞^2 curve invilvppo di scivolamento nullo sono proprio i punti.

7. Ma, un ulteriore e logico completamento a quanto sopra, deve considerarsi quello delle trasformazioni proiettive in una di tali varietà cayleyane.

E se definiamo come trasformazione proiettiva quella che muta le forme di prima specie in forme di prima specie, ne consegue che esse sono precisamente quelle che nel piano sostegno operano analogamente sulle forme di prima specie.

Cioè — come doveva logicamente attendersi — le trasfomazioni proiettive in un piano cayleyano sono, sinteticamente, quelle stesse del piano di sostegno.

Naturalmente le formule di trasformazione, nelle nuove distanze (e quindi sistema di coordinate) cayleyane non sono più così semplici come quelle nel piano euclideo; basta pensare che sulla sfera è definita sia la distanza che l'angolo, mentre il birapporto è riferito a funzioni trigonometriche di tali elementi.

Tuttavia noi possiamo con tali elementi definire fasci proiettivi e punteggiate proiettive; e come luogo delle intersezioni dei raggi corrispondenti di due fasci proiettivi o inviluppo delle congiungenti di punti corrispondenti in due punteggiate proiettive; avere le coniche, in quel piano cayleyano.

La forma di queste coniche, dipenderà dalla metrica cayleyana di sostegno; quindi, ad esempio, in una metrica basata su ellissi imaginaria le coniche sono di una *sola* forma, se reali, cioè tutte al finito: cioè ellissi. E ciò si vede sulla sfera, o se si vuolè sulla geometria della stella dove un cono (se non é imaginario) è di un solo tipo.

La classificazione delle coniche è stata fatta altrove (vedi loc. cit.): ciò che a noi importa notare è che, anche partendo da un piano di sostegno non più euclideo, ma già cayleyano, si possano interpretare in esso le altre geometrie non euclidee attraverso le metriche cayleyane.

Assumendo così sulla sfera soltanto una mezza sfera come luogo di punti accessibili; l'equatore come retta dei punti impropri, si viene ad interpretare *sulla sfera* la geometria euclidea: viceversa, assumendo una calotta minore di mezza sfera, si viene ad interpretare la geometria di Lobaceski; assumendo una calotta maggiore di mezza sfera si ha di nuovo una geometria di Riemann; ed infine assumendo la zona fra due calotte eguali diametralmente opposte, si ritrova la terza delle geometria non euclidea.

ANTONIO DELLA VALLE

Commemorazione letta dal socio corrispondente **G. Colosi**

(Adunanza del dì 12 gennaio 1935-XIII)

Consueta per lunghi anni fu in questa Accademia la presenza di Antonio Della Valle. Poi con l'avanzare dell'età il Suo intervento alle adunanze si fece sempre meno frequente; negli ultimi anni il regime di vita estremamente metodico a cui era costretto, non gli permise più di partecipare alla vita e all'attività dell'alto sodalizio di cui era stato lustro. Nè avremo ormai la speranza di vederlo, in qualche giornata tiepida della stagione clemente, ricomparire tra noi: pochi giorni or sono — e precisamente nella notte fra il 5 ed il 6 gennaio — Antonio Della Valle si spegneva come una fiamma che, ormai prossima al totale esaurimento, si smorzi al soffio di un alito. Così la gracile eppur tenace fibra del vecchio scienziato soccombette alfine sotto il peso dell'età al primo contrasto con i mali di cui è apportatore l'inverno. Egli aveva quasi 85 anni.

Noi tutti lo ricordiamo con devota nostalgia, mentre un commosso senso di pace c'invade lo spirito, pensando alla Sua vita, che fluì tranquilla ed a lungo, con ritmo uguale, condivisa tra gli affetti della famiglia, che Egli profondamente amò e da cui profondamente fu riamato, e la passione mai infievolita per gli studi prediletti. Due grandi, forse due soli dolori lo afflissero nel corso della Sua lunga esistenza: la perdita della consorte ancor giovane e, a gran distanza di tempo, la immatura fine del figlio Paolo, su cui Egli fondava la sicura fede di avere un successore degno ed un valido continuatore dell'opera scientifica propria. Quest'ultimo dolore da cui fu colpito in età già avanzata, per quanto lenito dalla benemerenza che il figlio soccombendo sui campi di battaglia si era guadagnata verso la Patria, ebbe una forte ripercussione sul Suo animo paterno e gli lasciò un inestinguibile ed amaro senso di scoraggiamento.

Tardi ebbi l'onore di conoscere Antonio Della Valle: quando, or son poco più di cinque anni, ebbi la ventura di esser chiamato alla cattedra che Egli aveva occupata, e mi recai a rendegli doveroso omaggio ottenendone benevola accoglienza. Poi lo rividi e mi trattenni altre volte con Lui nel chiuso ritiro della Sua dimora, da cui difficilmente usciva. Fino a tre anni or sono, a quando a quando Egli amava

ANTONIO DELLA VALLE

Nato in Soccavo il 13 febbraio 1850 - M. in Napoli il 6 Gennaio 1935

ancora rivedere l'Istituto che per quasi un trentennio aveva diretto; nè dimenticherò mai quelle poche visite, in cui vidi il vecchio Maestro rivivere ancora il tempo passato. Poichè l'età non aveva indebolito la sua memoria, nè offuscato la sua intelligenza. Egli ricordava uomini, cose ed avvenimenti, chiedeva notizie dei colleghi ad uno ad uno, s'interessava degli studi che via via si compivano e — cosa mirabile — non cessava di riflettere sui fenomeni dell'essere vivente, di meditare su quei problemi dello sviluppo, che tanto lo avevano appassionato nell'ultimo periodo della Sua attività scientifica.

Antonio Della Valle nacque a Soccavo (Napoli) il 13 febbraio del 1850. Dopo avere regolarmente compiuto gli studi, si laureava presso la nostra Università successivamente in Medicina e Chirurgia (1873) in Scienze Naturali (1874) e in Scienze fisiche e chimiche (1875). Ottenne subito per incarico l'insegnamento delle Scienze naturali presso l'Istituto Tecnico, indi passò come ordinario della medesima disciplina al R. Liceo Umberto I di Napoli.

Intanto alla dissertazione di laurea « La luce degli animali » pubblicata per voto della Facoltà di Scienze naturali, ed in cui già si rivelava l'attitudine del futuro scienziato ad inquadrare con sano criterio i fatti biologici, seguirono ben presto alcuni importanti lavori originali, che lo misero in prima linea fra i giovani zoologi di allora. Frequentatore assiduo della Stazione Zoologica, compì infatti le sue prime ricerche sistematiche, morfologiche ed embriologiche sulle ascidie composte, sui copepodi che albergano entro tali ascidie e sui coriceidi (copepodi) parassiti del nostro Golfo. Egli così nel 1884 fu in grado di riuscire vittorioso nel concorso per la cattedra di zoologia ed anatomia comparata della R. Università di Modena, ove insegnò per 13 anni, i primi nove dei quali furono in gran parte consacrati alla elaborazione di quella monumentale « Monografia dei Gammarini » che, iniziata nel 1882 alla Stazione Zoologica, proseguita alternativamente a Modena e a Napoli, vide finalmente la luce nel 1893. Si tratta di un'opera di oltre 900 grandi pagine, ornata di un atlante pi ben 61 tavole doppie, ove Antonio Della Valle riunì e sintetizzò le conoscenze sulla sistematica, l'anatomia, l'embriologia e la biologia di quei crostacei, colmando le molte lacune che allora si avevano nella conoscenza dei gammarini con un ingente contributo di accurate osservazioni e di ricerche originali. La « Monografia dei Gammarini » resta e resterà un'opera classica, a cui i carcinologi — nonostante gli ulteriori progressi fatti in materia e gli emendamenti che le sono stati apportati — si avvicinano e si avvicineranno sempre con ammirazione e rispetto.

Nel 1897, con voto unanime della Facoltà di Scienze naturali,

Antonio Della Valle venne chiamato nell'Università di Napoli, e così Egli potè ritornare come Maestro nell'Ateneo che lo aveva avuto a discepolo. Per ben 28 anni ne diresse l'Istituto di Anatomia e Fisiologia comparate — durante i quali Egli insegnò anche temporaneamente come incaricato Embriologia comparata ed Istologia e Fisiologia generale e tenne un corso alla Scuola di Magistero —, finchè, raggiunti i limiti di età, nel 1925 venne collocato a riposo. Ma la Facoltà di Scienze volle peraltro ancora fregiarsi del Suo nome, e propose ed ottenne che Antonio Della Valle rimanesse nel suo seno in qualità di Professore emerito, come già la Facoltà di Modena lo aveva voluto tra i suoi Professori onorari.

Nel periodo trascorso come direttore di questo Istituto di Anatomia e Fisiologia comparata, Antonio Della Valle ebbe campo di circondarsi di una eletta schiera di giovani studiosi e di creare una scuola improntata ad un sano culto per la ricerca e ad una schietta rettitudine scientifica, dando Egli stesso esempio di quale debba essere la vita di laboratorio. Coloro che ebbero la ventura di essere Suoi allievi ricordano sempre devotamente l'abnegazione con cui Egli prodigava suggerimenti, l'instancabilità con cui esortava all'accortezza e alla perseveranza nelle indagini e nelle deduzioni, la saggezza con cui ora infrenava ora stimolava le attitudini del discepolo, indirizzando sempre verso la severa e scrupolosa ricerca del vero.

Fra gli altri lavori da Lui compiuti in questo periodo non posso omettere di ricordare le « *Osservazioni su alcune ascidie del Golfo di Napoli* » pubblicate nel 1908 nelle Memorie della nostra Accademia. Quivi sono acutamente studiati alcuni interessanti fenomeni, quali i movimenti di traslazione delle colonie sul substrato, i movimenti delle appendici ectodermiche e la metamorfosi del *Diplosoma Listeri*, la rigenerazione della *Diazona violacea*, il problema dell'individualità del mantello comune delle ascidie composte; quivi con molta accortezza è discussa la sistematica dei Didemnidi.

In rapporto con questi studi ascidiologici, altra ragione di benemerenza acquistatasi da Antonio Della Valle è la collaborazione al Zoologischer Jahresbericht pubblicato dalla Stazione zoologica di Napoli, poichè a Lui per lungo tempo furono dovuti i preziosi riassunti con cui annualmente veniva compendiata la produzione mondiale sui tunicati.

Ed ecco che, verso la fine della Sua carriera, Antonio Della Valle è attratto dagli ardui problemi che concernono le prime fasi di sviluppo dei vertebrati ed il significato delle strutture fondamentali dei loro embrioni. Molto lavorò e meditò su tali argomenti, e benchè avesse già consegnato alla stampa una parte delle Sue speculazioni, pure fino agli ultimi giorni di esistenza non ristava dall'affaticare la

mente sui problemi ancora insoluti, meditando ancora sulla maniera di risolverli, sperando ancora di potere scrivere l'ultima opera della Sua vita.

Pago soltanto di adempiere scrupolosamente il proprio dovere di studioso e di Maestro, privo di ambizioni, alieno della ricerca di onori, Antonio Della Valle fu però meritatamente apprezzato dai cultori di scienze biologiche. La Società Reale di Napoli lo volle socio ordinario dell'Accademia di Scienze fisiche e matematiche ; la Reale Accademia dei Lincei lo nominò socio nazionale; socio lo ebbero l'Accademia Pontaniana di Napoli e l'Accademia di Scienze Lettere ed Arti di Modena. La Società dei Naturalisti di Napoli, in occasione della chiusura della di Lui carriera d'insegnante, gli tributò solenni onoranze.

Troppo breve, certo, è stata questa mia rievocazione dell'illustre Scomparso. Ma voi tutti, o Consoci, — che per tanti anni gli siete stati colleghi ed amici, che ne avete apprezzata l'integrità del carattere e la solida intelligenza, che Lo avete conosciuto nel pieno vigore della Sua attività, che Lo avete seguito nella vita di assiduo lavoro e che oggi ne rimpiangete la perdita — voi tutti potete aggiungere a queste mie poche parole la ricca messe dei vostri ricordi, sì da avere dinnanzi agli occhi completa e incancellabile l'immagine austera di Antonio Della Valle.

Elenco delle pubblicazioni del Prof. Antonio Della Valle *)

1. *La luce negli animali.* Napoli, 1875.
2. *Contribuzioni alla Storia naturale delle Ascidie composte del Golfo di Napoli con la descrizione di alcune specie e varietà nuove e di altre poco note.* Napoli, 1877.
3. *Sui Coriceidi parassiti e nell'anatomia del genere Lichomolgus.* Mem. R. Accad. Lincei. Classe Sc. Fis. Mat. Nat. (3.°) G, (1879) 1880, e Mittheil. Zool. Stat. Neapel, I, 1880.
4. *Nuove contribuzioni alla storia naturale delle Ascidie composte del Golfo di Napoli.* Mem. R. Accad. Lincei. Classe Sc. Fis. Mat. Nat. (3.ª) X. 1932.

*) Nell'elenco delle pubblicazioni sono stati omessi vari Rapporti sui lavori compiuti dalla «R. Accad. delle Sc. Fis. e Mat. di Napoli», i riassunti sui lavori riguardanti i Tunicati pubblicati nel «Zool. Jahresb.» nonchè le « *Note di Anatomia comparata raccolte dalle lezioni del Prof. P. Panceri* Napoli, 1875.

5. *Recherches sur l' anatomie des Ascidies composées.* Arch. ital. Biol., II, 1882.
6. *Sur le burgeonnement des Didemnides et des Botryllides, et sur le type enterocoelien des Ascidies.* Arch. ital Biol., II, 1882.
7. *Sui Copepodi che vivono nelle Ascidie composte del Golfo di Napoli.* Mem. R. Accad. Lincei. Classe Sc. Fis. Mat. Nat. (3.ª), XV, 1883.
8. *La scuola zoologica napoletana.* Napoli, 1883.
9. *Sul ringiovanimento delle colonie di Diazona violacea Savigny.* Rend. R. Acc. Sc. Fis. Mat. Napoli, XXIII, 1884. (Vedi anche: Arch. Ital. Biol., V, 1885).
10. *Sopra le ghiandole glutinifere e sopra gli occhi degli Ampeliscidi del Golfo di Napoli.* Atti Soc. Natur. Modena, (3.ª) VII, 1888.
11. *Deposizione, fecondazione e segmentazione delle uova del Gammarus pulex.* Atti Soc. Natur. Modena, (3.ª) VIII, 1889.
12. *Gammarini del Golfo di Napoli.* Fauna u. Flora des Golfes von Neapel, Monogr. 20, 1893.
13. *Carlo Vogt.* (Commemorazione). Atti Soc. Natural. Modena, (3.ª) XIV, 1896.
14. *Tommaso Enrico Huxley.* (Commemorazione). Atti Soc. Natural. Modena, (3.ª) XIV, 1896.
15. *Achille Costa.* (Commemorazione). V. Rend. R. Accad. Sc. Fis. Mat. Napoli, XXXVII, 1898.
16. *Commemorazione di Achille Costa.* Atti Accad. Pontaniana Napoli, XXIX, 1899.
17. *Intorno ai movimenti delle appendici ectodermiche del Diplosoma Listari.* Rend. R. Accad. Sc. Fis. Mat. Napoli, XXXIX, 1900.
18. *Osservazioni intorno alle migrazioni delle colonie di Diplosoma Listeri.* Monit. Zool. Ital., XI, 1901.
19. *Di alcune particolarità osservate nelle Ascidie del Golfo di Napoli.* Monit. Zool. Ital., XII, 1901.
20. *Osservazioni su alcune Ascidie del Golfo di Napoli.* Atti R. Accad. Sc. Fis. Mat. Napoli, XIII, 1908.
21. *Antonio Dohrn.* (Commemorazione). Rendic. R. Accad. Sc. Fis. Mat. Napoli, 1909.
22. *Pubblicazioni del Prof. G. V. Ciaccio intorno all' anatomia microscopica* (in: *In Memoria di Giuseppe Vincenzo Ciaccio nel X anniversario della sua morte*), Torino, 1912.
23. *Augusto Weismann.* (Commemorazione). Rend. Accad. Sc. Fis. Mat. Napoli (3ª), XXI, 1915.
24. *Giovanni Paladino.* (Commemorazione). Atti Accad. Pontaniana Napoli, XLVII, 1917.

25. *Giovanni Paladino.* (Commemorazione). Rend. R. Accad. Sc. Fis. Mat., Napoli, (3ª), XXIII, 1917.

26. *La nota primitiva e le sue adiacenze nella prima formazione dell'embrione dei Vertebrati.* I. *La Nota nella somatogenesi.* Rend. R. Accad. Sc. Fis. Mat., Napoli, (3ª), XXVI, 1920.

27. *Camillo Golgi.* (Commemorazione). Rend. R. Accad. Sc. Fis. Nat. Napoli, (3) XXXII, 1926.

28. *La prima formazione dell'embrione degli omeatermi durante la fase della « nota primitiva ».* Atti R. Accad. Sc. Fis. Mat. Napoli, (2) XVII, 1927. Vedi anche: Rend. R. Accad. Sc. Fis. Mat. Napoli, (3) XXIX, 1923.

29. *Francesco Saverio Monticelli.* (Commemorazione). Rend. R. Acc. Sc. Fis. Mat., Napoli, (3) XXXIII, 1927.

Elementi per una geometria metrico-differenziale di una V_1 in una V_2 isotropa cayleyana

Nota del socio corrispondente **Giulio Andreoli**

(Adunanza del dì 2 febbraio 1935 - XIII).

Sunto. — L' A. inizia la ricerca degli elementi atti a caratterizzare varietà immerse in spazi cayleyani isotropi, partendo dal caso della curva nel piano. Delinea la permanenza di tutti i risultati fondamentali del Cesàro sulle geometrie intrinseche ed accenna alle geometrie intrinseche delle curve pensate come fili inestensibili ed inflessibili, oppure inestensibili e flessibili, oppure ancora estensibili ma inflessibili.

1. Ci proponiamo ora di investigare quali debbono essere le linee fondamentali per una geometria metrico-differenziale delle linee tracciate in una V_2 a metrica cayleyana. Supponiamo, al solito, che la conica fondamentale di questa geometria non sia degenere nè puntualmente, nè tangenzialmente: di pochissimo del resto, verrebbero modificate le conclusioni se ciò non fosse.

Ove si parli di geometria metrica differenziale di una curva in una V_2 cayleyana, occorre riflettere che lungo la curva stessa, a partire da un suo punto prefissato con la relativa tangente vanno collegati due elementi: l'arco lineare e l'arco angolare; il primo dato dal processo integrale che consiste nel considerare la curva come limite di poligonali delle quali si considerano i lati successivi, ed il secondo ottenuto considerando invece gli angoli successivi.

Soltanto ove la conica fondamentale K sia tangenzialmente degenere, l'integrale degli elementi d'arco angolari si riduce all'angolo formato dalla tangente variabile con quella iniziale; ed invece se la K sia puntualmente degenere lo stesso avviene per l'arco lineare: nel primo caso esisteranno coppie di curve per le quali ad archi lineari proporzionali delle due corrispondono eguali archi angolari; e dualmente nell'altro caso (con possibilità di riferirle in modo che risultino simili rispetto ad un centro, e dualmente).

I problemi fondamentali che si presentano allora sono i seguenti:

I. riconoscere quand'è che due curve hanno rispettivamente eguali archi lineari ed archi angolari;

II*a*). riconoscere quand'è che due curve hanno rispettivamente eguali gli archi lineari;

II*b*). riconoscere quand'è che due curve hanno rispettivamente eguali gli archi angolari.

2. È sin troppo evidente che il primo problema ammette subito una risposta (per il momento, parziale): cioè due curve sono « eguali » se si deducono l'una dall'altra per un movimento.

D'altro lato, ove si pongano in corrispondenza le due curve in esame, mediante un parametro t di distribuzione dei punti sulle due curve, e si pone la condizione che in punti corrispondenti si abbiano archi lineari ed archi angolari eguali, si deduce subito (facendo il rapporto o dei corrispondenti archi lineari eguale ad uno e lo stesso per quello degli archi angolari, oppure scrivendo che sono eguali il rapporto fra elemento lineare ed elemento angolare della prima e della seconda curva) che vale un sistema di equazioni differenziali per le due curve, sistema del tipo di Riccati.

E l'integrazione di questo, seguendo passo per passo le classiche ricerche di Cesàro sulla geometria intrinseca, mostra che due curve nelle condizioni del I problema sono deducibili l'una dall'altra mediante un movimento rigido del piano cayleyano (o mediante un movimento ed una simmetria).

Quindi il primo tipo di problema riporta in pieno alla detta geometria intrinseca del Cesàro: e se pure le formule possono apparire scritte in forma più generale, concettualmente non vi sarà nulla di nuovo o di difficile sviluppo.

Resta a notare tuttavia che si presentano sulle curve, nel caso generale, dei punti singolari e delle tangenti singolari che non appaiono in geometria euclidea.

Così ad esempio se un punto della curva C, non situato sulla K, ha tuttavia una tangente comune con K, essendo questa una retta di lunghezza nulla, sarà ivi nullo il rapporto fra elemento lineare della curva ed elemento angolare: senza che vi sia una cuspide. Dualmente se la curva ha un punto comune con la K senza avere in quel punto la stessa tangente, quel rapporto sarà infinito, senza che si abbia un flesso; e lo stesso rapporto risulta indeterminato se la C ha un punto in comune con K avendo ivi la stessa tangente.

Tali punti si trasportano, conservando inalterata la loro qualità, nei movimenti.

3. D'altro canto, come abbiamo già ripetutamente detto, due diverse definizioni di curvatura si presentano: una attaccata al concetto di cerchio (curva luogo di equidistanza e curva inviluppo isoclina) osculatore e l'altra collegata al rapporto anzidetto fra ds e $d\omega$:

avendosi rispettivamente il raggio di osculazione r ed il raggio di curvatura ρ.

Dalla presenza dei gruppi di rotazioni attorno ad un punto, è facile rilevare come, in generale

$$r = R(\rho) \quad ; \quad \rho = \mathrm{P}(r)$$

in quanto ogni curva luogo di equidistanza è anche (ovviamente a causa dei movimenti) anche a curvatura costante: la funzione φ è a tipo algebrico o logaritmico-trigonometrico.

Pertanto, una geometria intrinseca (nel senso del Cesàro) delle curve immerse in un piano cayleyano, si può presentare sia sotto forma dell'equazione intrinseca $r = f(s)$ che sotto quella

$$\rho = P(f(s)) = g(s).$$

Attraverso tale procedimento si vede che restano definiti due pezzi di curve, come eguali (a meno di movimenti o di simmetrie) se hanno la stessa equazione intrinseca, a meno di una costante additiva per l'arco di curva. L'eguaglianza di archi di curve si estende da un punto singolare all'altro: sono di arresto però i punti nei quali la curva ha tangente comune con la K o incontra K: nel primo caso si possono far scorrere i due pezzi di curva lungo la tangente, nel secondo si possono far ruotare i due pezzi di curva attorno al punto comune; e questo perchè nel primo caso non si aggiunge nulla all'arco lineare, e nel secondo all'arco angolare.

4. I due problemi del tipo II invece, vanno interpretati diversamente, e diversamente illustrati. Per renderne più perspicua l'interpretazione, supponiamo che le due curve da confrontare rispettivamente nel caso II*a)* e II*b)* vengano ad essere considerate come limiti di poligonali equilatere (nel IIa) equiangole (nel IIb). Verremo così a dover rispettivamente confrontare due poligonali, aventi lo stesso numero di lati (tutti eguali fra loro) e diversificantisi soltanto per gli angoli successivi fra lati consecutivi, nel caso IIa). Invece nel IIb) veniamo a confrontare due poligonali aventi tutti gli angoli eguali fra loro (e fra le due curve) e diverse soltanto per le lunghezze dei lati fra due vertici consecutivi.

Nel primo caso, conservandosi le lunghezze ma non gli angoli, la seconda poligonale può sempre ricondursi alla prima supponendola a cerniera nei vertici, con una opportuna rotazione attaccata ad ogni coppia di lati consecutivi; e nel secondo caso invece la seconda può sempre ricondursi alla prima (ove la giuntura fra due lati consecutivi

si supponga rigida) con lo scorrimento dei due vertici su ogni lato; e si ha quindi una successione di scorrimenti che conduce la seconda poligonale sulla prima.

È ovvio che passando al limite ciò può affermarsi anche per le curve: quindi si ha rispettivamente una geometria metrico-differenziale per le curve cayleyane, supposte inestensibili ma flessibili, nel primo caso; una per le curve supposte estensibili ma inflessibili nel secondo caso.

Ambo i tipi sono però privi di interesse: in quanto tutto si riduce ad identificare nel primo caso due curve aventi archi lineari eguali, e nel secondo, aventi archi angolari eguali.

Però tali considerazioni non sono prive di possibilità di sviluppi ulteriori per varietà ad un numero maggiore di dimensioni, in quanto si delinea l'applicabilità di due varietà ottenute non più con un solo movimento rigido d'insieme, ma sibbene l'applicabilità ottenuta con movimenti diversi, infinitesimi, fra le diverse parti infinitesime, subordinatamente a certe condizioni di flessibilità, di estensibilità da fissare volta per volta.

È troppo evidente poi che se si confrontano due curve supposte flessibili ed estensibili, vengono a cadere le formazioni differenziali invarianti che avevamo (elementi d'arco lineare o elementi d'arco angolare) e due curve qualsiasi sono sempre applicabili in una infinità funzionale di modi diversi.

5. Pertanto, riassumendo:

1.) Se una curva viene caratterizzata dall'elemento d'arco lineare e dall'elemento d'arco angolare, essa è completamente fissata in un piano cayleyano, a meno di movimento. Vi è allora la possibilità di caratterizzarla mediante equazioni intrinseche.

2.) Se un arco di curva viene caratterizzato dall'elemento d'arco lineare oppure da quello angolare, esso può coincidere con qualsiasi altro, attraverso una infinità di movimenti infinitesimi: rispettivamente rotazioni di polo nei singoli punti della curva (nel primo caso), rotazioni aventi come polari le singole tangenti della curva (nel secondo caso). Si ha la geometria delle curve flessibili nel primo, delle curve rigide (o inflessibili) nel secondo.

Sulla derivata ennesima di un Wronskiano

Nota del prof. **A. Colucci**

[Adunanza del 9 febbraio 1935 - XIII]

Sunto. — Si dànno due formole per la derivata ennesima di un Wronskiano.

1. L' idea di questo lavoro ci è venuta dal Ch.mo prof. E. Pascal. Speriamo che il contenuto di esso possa presentare un qualche interesse e trovare applicazione in analisi. Ci permettiamo inoltre di fare particolare segnalazione della seconda delle due formole da noi date per la derivata ennesima di un Wronskiano, formola che sembra notevole per la sua semplicità e simmetria.

2. Cominciamo col premettere la formola per il calcolo della derivata n^{ma} di un determinante. Sia

$$\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \cdots y_{1m} \\ y_{21} & y_{22} \cdots y_{2m} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_{m1} & y_{m2} \cdots y_{mm} \end{vmatrix} \tag{1}$$

un determinante d'ordine m i cui elementi sono funzioni derivabili della x, determinante che indicheremo brevemente col simbolo $[y_{11}, y_{22}, \cdots y_{mm}]$.

La derivata n^{ma} di esso si compone evidentemente della somma di tanti determinanti del tipo $[y_{11}^{(i_1)}, y_{22}^{(i_2)} \ldots y_{mm}^{(i_m)}]$, dove $i_1 + i_2 + \ldots + i_m = n$.

Per quanto riguarda i coefficienti, si osservi che essi sono indipendenti dalla natura delle funzioni $y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{mm}$; perciò potremo rintracciarli ricorrendo a particolari funzioni.

Considerando, per esempio, il determinante seguente

$$\begin{vmatrix} e^{a_1 x} & 0 & \ldots 0 \\ 0 & e^{a_2 x} \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\ 0 & 0 & \ldots e^{a_m x} \end{vmatrix}$$

dove $a_1, a_2, \ldots, a_m$ denotano delle costanti arbitrarie, si ha

$$[e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \ldots, e^{a_m x}]^{(n)} = \sum \frac{n!}{i_1!\, i_2! \ldots i_m!} [a_1^{i_1} e^{a_1 x}, a_2^{i_2} e^{a_2 x}, \ldots, a_m^{i_m} e^{a_m x}]$$

il sommatorio essendo esteso a tutte le soluzioni in numeri interi non negativi dell'equazione

$$i_1 + i_2 + \ldots + i_m = n \qquad (2)$$

Segue che i coefficienti richiesti sono i coefficienti polinomiali; vale pertanto la formola generale

$$[y_{11}, y_{22}, \ldots, y_{mm}]^{(n)} = \sum \frac{n!}{i_1!\, i_2! \ldots i_m!} [y_{11}^{(i_1)}, y_{22}^{(i_2)}, \ldots, y_{mm}^{(i_m)}] \qquad (3)$$

3. Facendo

$$y_{hl} = y_l^{(h-1)} \qquad (h, l = 1, , 2, \ldots, m)$$

il determinante (1) diventa il Wronskiano W delle funzioni y_1, $y_2, \ldots, y_m$, che noi, in conformità della notazione precedente, indicheremo anche con $[y_1, y_2', \ldots . y_m^{(m-1)}]$. Applicando ad esso la formola(3), con un'ovvia trasformazione di indici abbiamo:

$$[y_1, y_2', \ldots, y_m^{(m-1)}]^{(n)} = \sum \frac{n!}{\alpha_1!(\alpha_2-1)!\ldots(\alpha_m-m+1)!} [y_1^{(\alpha_1)}, y_2^{(\alpha_2)}, \ldots, y_m^{(\alpha_m)}] \qquad (4)$$

dove ora il sommatorio deve intendersi esteso a tutte e sole quelle soluzioni intere dell' equazione

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = n + \frac{m(m-1)}{2} \qquad (5)$$

per le quali sono verificate le condizioni

$$\alpha_1 \geqq 0, \qquad \alpha_2 \geqq 1, \ldots, \qquad \alpha_m \geqq m - 1. \qquad (6)$$

Nel secondo membro della (4) figurano dei determinanti nulli ed anche, in generale, dei determinanti eguali ed opposti; dovendo, com'è naturale, escludere i primi e raccogliere i secondi, occorre dare alla formola in discorso un altro aspetto.

In tale intento, scriveremo la (4) come segue

$$W^{(n)} = \sum C_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m} [y_1^{(\alpha_1)}, y_2^{(\alpha_2)}, \ldots, y_m^{(\alpha_m)}] \qquad (7)$$

dove il sommatorio è esteso alle soluzioni della (5) tali che

$$\alpha_1 < \alpha_2, < \alpha_3 < \ldots < \alpha_m$$

e

$$C_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m} = S(-1)^{\beta} \frac{n!}{\beta_1!\,(\beta_2-1)!\ldots(\beta_m-m+1)!} \qquad (8)$$

nella quale la somma S è estesa a tutte le permutazioni $(\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_m)$ (compresa la $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m)$) degli indici $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ che obbediscono alle condizioni (6), e β eguaglia il numero delle inversioni della permutazione generica $(\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_m)$.

Perchè la (7) sia di agevole applicazione occorre dare una regola sistematica per la formazione di tali permutazioni.

Denoti μ_k il minore dei due interi $\alpha_k - k + 1$, $n - k$ e si formi il quadro

$$(m-1,\ \mu_{m-1}+m-1) \qquad (9)'$$

$$(m-2,\ m-1),\ (m-2,\ \mu_{m-2}+m-2) \qquad (9)''$$

$$(m-3,\ m-2),\ (m-3, m-1),\ (m-3, \mu_{m-3}+m-3) \qquad (9)'''$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(1, 2),\ (1, 3),\ \ldots\ldots\ (1,\ \mu_1+1) \qquad (9)^{(m-1)}$$

nel quale la parentesi (r, s) sta a rappresentare lo scambio degli elementi di posto r^{mo} ed s^{mo} in una permutaziane di m elementi.

Partendo dalla permutazione fondamentale $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m)$ si applichi ad essa lo scambio (9)'; indi alle due precedenti si applichino successivamente gli scambi (9)''; sulle quattro finora ottenute si eseguano gli scambi (9)''', e così via fino agli scambi dell' ultima orizzontale del quadro. Così facendo si ottengono tutte le permutazioni $(\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_m)$ occorrenti nella (8); esse sono evidentemente in numero di

$$1 + \Sigma\mu_1 + \Sigma\mu_1\mu_2 + \ldots + \mu_1\mu_2 \ldots \mu_{m-1}.$$

Esempio. Si voglia la derivata 5.ª di un Wronskiano di 4.° ordine.

Abbiamo:

$$C_{0,1,2,5} = \frac{5!}{0!\,0!\,0!\,5!} = 1\ ,$$

$$C_{0,1,3,7} = \frac{5!}{0!\,0!\,1!\,4!} - \frac{5!}{0!\,0!\,5!\,0!} = 4\ ,$$

$$C_{0,1,4,6} = \frac{5!}{0!\,0!\,2!\,3!} - \frac{5!}{0!\,0!\,4!\,1!} = 5\ ,$$

$$C_{0,2,3,6} = \frac{5!}{0!\,1!\,1!\,3!} - \frac{5!}{0!\,1!\,4!\,0!} - \frac{5!}{0!\,2!\,0!\,3!} + \frac{5!}{0!\,5!\,0!\,0!} = 6\,,$$

$$C_{0,2,4,5} = \frac{5!}{0!\,1!\,2!\,2!} - \frac{5!}{0!\,1!\,3!\,1!} - \frac{5!}{0!\,3!\,0!\,2!} + \frac{5!}{0!\,4!\,0!\,1!} = 5\,,$$

$$C_{1,2,3,5} = \frac{5!}{1!\,1!\,1!\,2!} - \frac{5!}{1!\,1!\,3!\,0!} - \frac{5!}{1!\,2!\,0!\,2!} + \frac{5!}{1!\,4!\,0!\,0!}$$
$$- \frac{5!}{2!\,0!\,1!\,2!} + \frac{5!}{2!\,0!\,3!\,0!} + \frac{5!}{3!\,0!\,0!\,2!} - \frac{5!}{5!\,0!\,0!\,0!} = 4\,.$$

Pertanto si ha:

$$[y_1, y_2', y_3'', y_4''']^{(5)} = [y, y', y'', y^{\text{VIII}}] + 4[y, y', y''', y^{\text{VII}}] + 5[y, y', y^{\text{IV}}, y^{\text{VI}}] + \\ + 6[y, y'', y''', y^{\text{VI}}] + 5[y, y'', y^{\text{IV}}, y^{\text{V}}] + 4[y', y'', y''', y^{\text{V}}].$$

4. Vogliamo ora dare un' altra espressione dei coefficienti $C_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m}$.

Osserviamo che si può scrivere

$$C_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m} = \frac{n!\,1!\,2!\ldots(m-1)!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_m!}\, S(-1)^{\beta} \binom{\beta_2}{1}\binom{\beta_3}{2}\cdots\binom{\beta_m}{m-1}.$$

La somma del secondo membro rappresenta il determinante di STERN [1]) formato con le quantità $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$; perciò essa è uguale al determinante di VANDERMONDE $V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ diviso per $2^{m-1}\,3^{m-2}\,(m-2)^2\ldots(m-1)$.

Sostituendo nella formola precedente abbiamo:

$$C_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m} = \frac{n!\,V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_m!}\,.$$

Pertanto, la formola (7) diventa

$$W^{(n)} = n! \sum \frac{V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_m!}\,[y_1^{(\alpha_1)}, y_2^{(\alpha_2)}, \ldots, y_m^{(\alpha_m)}]$$

dove, ricordiamolo, il sommatorio è esteso a tutte le soluzioni intere della equazione

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = n + \frac{m\,(m-1)}{2}$$

tali che

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_m.$$

---

[1]) Cfr. E. PASCAL, *I Determinanti*, 2.ª ed. (Milano, 1923), p. 202.

5. Può avere interesse di sapere quanti sono i determinanti che entrano nel secondo membro della formola precedente (e della formola (7)).

Osserviamo che ad ogni soluzione della (5) in numeri interi *crescenti* corrisponde una soluzione della (2) in numeri interi *non decrescenti*, e viceversa; pertanto il numero richiesto coincide con quello delle partizioni dell'intero n in m parti prese nel gruppo $0, 1, 2, \ldots, n$. Si ricade quindi su una questione trattata da Eulero nelle sue ricerche sulla partizione dei numeri. Il numero dei determinanti in discorso viene perciò dato dal coefficiente di $x^n y^m$ nello sviluppo di

$$\frac{1}{(1-y)\ 1-xy)\ldots.\ (1-x^n y)}.$$

Si può anche, con Brioschi [1]), determinare tale numero mediante la formola notevole

$$\frac{1}{n!}\begin{vmatrix} s_1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ s_2 & s_1 & -2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-1} & s_{n-2} & s_{n-3} & \ldots & -(n-1) \\ s_n & s_{n-1} & s_{n-2} & \ldots & s_1 \end{vmatrix}$$

dove

$$s_i = \sum_{j=1}^{j=m} \left(E\left(\frac{i}{j}\right) - E\left(\frac{i}{n+j}\right) \right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

e $E\left(\frac{p}{q}\right)$ denota un numero che è zero se p non è divisibile per q ed è uguale a q nel caso contrario [2]).

---

[1]) Brioschi, *Sul principio di reciprocità nella teoria delle forme*, Annali di Scienze Matem. e Fis., tomo VII (1856), pp. 303-312; oppure: *Opere di Brioschi*, (Milano, 1901), p. 233.

[2]) Osserviamo che la funzione $E(x)$ definita sopra per i soli valori razionali dell'argomento, si può esprimere per mezzo della funzione $[x]$ « *intero di* x » con la formola

$$E\left(\frac{p}{q}\right) = q\left[\frac{q}{p}\left[\frac{p}{q}\right]\right].$$

Osservazioni del Pianeta Saturno, eseguite al R. Osservatorio di Capodimonte.

Nota della dott. **M. Viaro**

(Adunanza del dì 9 febbraio 1935 - XIII)

Sunto. — Si riportano 30 osservazioni meridiane del pianeta Saturno, eseguite dal settembre al novembre 1934, e i corrispondenti scarti (O-C) dalla effemeride calcolata.

Le seguenti ascensioni rette del pianeta Saturno sono state determinate con lo strumento dei passaggi di Bamberg [1]), (munito di micrometro impersonale), che tolto dal cupolino est, perchè questo oltre ad avere una apertura troppo limitata presentava seria difficoltà di manovra e non riparava a sufficienza dalle intemperie, fu collocato provvisoriamente nel casottino in muratura, costruito per il collimatore del vecchio cerchio meridiano di Reichembach [2]).

Ogni stella di confronto venne osservata bisecandola col filo mobile e seguendola per circa 3 rivoluzioni prima e dopo l'inversione dello strumento. Vennero letti gli istanti di dieci contatti da ciascun lato, scegliendoli in guisa da escludere dieci alternati, oltre i primi e gli ultimi: furono questi che servirono alla determinazione dei Δt. Le polari furono seguite generalmente per una rivoluzione e mezzo, ed anche per esse il tempo del passaggio è quello della media di dieci doppi contatti. Saturno fu osservato analogamente, ma mantenendo il filo mobile tangente al primo bordo. I contatti vennero registrati su di un cronografo a cilindro di Hipp, sul quale era inserito l'orologio a pendolo di Riefler Num. 337. La livella, che rimane sempre appesa all'asse, venne letta immediatamente prima e dopo l'osservazione di ciascuna stella: quale valore angolare venne adottato quello abituale di 0.07577 [3]) e fu tenuto conto delle irregolarità dei perni [4]).

---

[1]) Vedi: *Differenza di longitudine fra Roma (Monte Mario) e Napoli (Capodimonte) determinata nei mesi di giugno e luglio 1909*, da E. Bianchi, F. Contarino, V. Nobile e G. Zappa.

[2]) Vedi L. Carnera. *La specola di Capodimonte negli anni 1932-33.* Calendario del R. Osservatorio astronomico di Napoli per l'anno 1934, p. 58-59.

[3]) E. Guerrieri. *Esame della livella del Bamberg eseguito negli anni 1919-1920.*

[4]) E. Guerrieri. *Irregolarità del diametro dei perni dello strumento dei passaggi di Bamberg del R. Osservatorio astronomico di Capodimonte.* Contributi Astronomici, Vol. I, n. 26.

Il programma di ogni sera comprendeva l'osservazione, oltre che del pianeta, di alcune stelle di confronto, prese dalla lista delle stelle orarie date dall'Osservatorio di Greenwich quali fondamentali; e le cui posizioni medie per il 1934 sono le seguenti:

	h	m	s					
ξ Aquarii . . .	21	31	14.365	—	8°	09	3″.79	(Naut. Almanac)
δ Capricorni . .	21	43	24.019	—	16	25	39 .14	»
16 Pegasi	21	50	3.345	+	25	36	50 .05	»
α Aquarii . . .	22	2	23.658	—	0	38	28 .06	»
ϑ Aquarii . . .	22	13	21.116	—	8	6	45 .14	»
γ Aquarii . . .	22	18	14.853	—	1	43	13 .56	»

Anche le circumpolari, osservate in ogni sera in numero di 2 o 3, furono tolte dalla stessa lista, ad eccezione del 26 settembre in cui per le cattive condizioni atmosferiche ci si limitò ad osservare la sola IH Draconis, tolta dall'American Ephemeris, e qualche altra sera in cui oltre alla stessa stella si osservò pure la Groombridge 3548, ovvero la 39H Cephei. Le polari osservate furono:

	h	m	s			
51 H. Cephei . . .	7	10	16.276	87°	9′	16″.86
4B Ursae minoris .	8	32	1.495	88	49	40 .01
Groombridge 3548 .	21	12	43.870	86	45	59 .78
1 H. Draconis . . .	9	27	49.874	81	37	14 .03
39H Cephei. . . .	23	27	40.525	86	56	36 .47

Dalla tabella I, in cui sono riportati gli azimut strumentali ottenuti, risulta evidente, che ebbe luogo in ciascuna sera una leggiera variazione dell'azimut. Ogni tentativo però inteso a tener conto di questa variazione portò un vantaggio del tutto illusorio sull'accordo dei Δt delle stelle orarie. D'altra parte poichè i valori ricavati dalle differenze fra il Δt medio, ed il Δt di ciascuna stella, sia se considerati sera per sera, quanto nel loro complesso, non presentano indizi di sistematicità, e non vien suggerita alcuna correzione in virtù della quale si possa tener conto della variazione serale dell'azimut, venne usato nella riduzione definitiva l'azimut medio che risulta in ogni sera dalle circumpolari osservate. Si ebbero così i seguenti valori medi degli scarti serali fra il valore del Δt medio e quello presentato da ciascuna stella:

ξ Aquarii	— 0.017
δ Capricorni . . .	+ 0.019
16 Pegasi.	— 0.007
α Aquarii	0.000
ϑ Aquarii	+ 0.005
γ Aquarii	+ 0.010

Nella tabella II riportiamo con la data di osservazione i valori dei Δt ottenuti per ciascuna stella di confronto; e nella tabella III il tempo corretto del passaggio in meridiano del pianeta Saturno, risultante dall'osservazione, il semidiametro equatoriale, calcolato da quello polare dato dal «Nautical Almanac»; l'istante del passaggio in meridiano del centro del pianeta, e finalmente le corrispondenti deviazioni (O-C) in base all'effemeride della «Connaissance des Temps». Nell'ultima colonna sono riportate le condizioni di nebulosità e di agitazione dell'aria [1]).

---

[1]) Aggiungiamo nel seguente specchietto per le quattro stelle osservate e comprese nel 3° Catalogo fondamentale di Berlino: nella prima colonna le differenze fra le posizioni medie del detto catalogo e quelle da noi adottate, e nella seconda i valori delle medie delle differenze serali fra i Δt medi, e quelli delle singole stelle, se si fossero adottate le posizioni medie del 3° Catalogo fondamentale.

	s	s
δ Capricorni. . .	— 0.035	+ 0.016
16 Pegasi	— 0.034	— 0.005
α Aquarii . . .	— 0.040	+ 0.009
ϑ Aquarii . . .	— 0.018	— 0.009

Da questo rapido confronto risulta che le posizioni da noi adottate (a drescindere dalla ξ Aquarii non contenuta nel F. K. 3) si possono considerare spostate di circa + 0ˢ.03 rispetto a quelle del 3° Catalogo fondamentale, e che quindi l'equinozio di primavera al quale son riferite le presenti osservazioni risulta spostato di circa 0.03 secondi rispetto a quelle del detto catalogo.

TABELLA I. — AZIMUT STRUMENTALI.

Data		51 H Cephei	4 B Ursae Min.	Groombridge 3548	1 H Draconis	39 H Cephei	
Settembre	24	+ 0.037	+ 0.115				
	25	— 0.131	— 0.053				
	26				— 0.115		
	27	+ 0.163	+ 0.060				
	28		— 0.153	— 0.239			
	29		— 0.098	— 0.197			
	30		— 0.038	— 0.010			
Ottobre	1	— 0.050		— 0.202			
	2		— 0.068	— 0.211			
	3	— 0.060	— 0.113	— 0.225			
	5	— 0.045			— 0.024		
	12	+ 0.050	— 0.036				
	14	— 0.128	— 0.130	— 0.281			
	19		— 0.125	— 0.253			
	23		— 0.207	— 0.322			
	24		— 0.222	— 0.302			
	25		— 0.225	— 0.355			
	26		— 0.183	— 0.264			
	27			— 0.314		— 0.326	
	28		— 0.269	— 0.346			
	30			— 0.511		— 0.529	
Novembre	1				— 0.216	— 0.120	
	9		+ 0.175	+ 0.079		+ 0.051	
	17			— 0.010		— 0.114	
	18			— 0.035	— 0.038		
	22				— 0.133	— 0.245	
	23			— 0.347		— 0.432	
	24			— 0.372		— 0.436	
	26				— 0.326	— 0.417	
	27				— 0.454	— 0.414	

TABELLA II. — $\Delta\ t$ DELLE STELLE DI CONFRONTO RIDOTTI ALL'ISTANTE DELLA CULMINAZIONE DI SATURNO.

Data		ξ Aquarii	δ Capricorni	16 Pegasi	α Aquarii	ϑ Aquarii	γ Aquarii
Settembre	24	— 25.694	—	— 25.609	—	— 25.715	
	25	— 25.828	—	— 25.768	— 25.775	— 25.795	
	26	— 25.940	—	— 25.999	— 26.009	— 26.016	
	27	— 26.336	— 26.413	—	— 26.416	—	
	28	— 26.465	— 26.564	— 26.541	— 26.514	— 26.554	
	29	— 26.714	— 26.771	— 26.703	— 26.679	— 26.653	
	30	— 27.024	— 27.060	— 27.031	— 27.095	— 27 090	
Ottobre	1	— 27.303	— 27.350	— 27.240	— 27.219	— 27.226	
	2	— 27.500	— 27.552	— 27.503	— 27.497	— 27.440	
	3	— 27.729	— 27.785	— 27.783	— 27.740	— 27.766	
	5	— 28.233	—	—	—	— 28.382	
	12	— 30.033	— 30.037	— 30.001	— 30.028	—	
	14	— 30.472	— 30.464	— 30.463	— 30.508	— 30.462	
	19	— 31.931	— 32.042	— 31.961	— 31.966	— 31.987	
	23	— 33.692	— 33.765	— 33.699	—	— 33.729	— 33.728
	24	— 34.130	— 34.084	— 34.107	— 34.114	—	
	25	— 34.516	—	— 34.504	— 34.538	— 34.557	— 34.547
	26	— 34.996	— 34.997	— 34 954	— 35.046	— 35.040	
	27	— 39.362	— 39.397	— 39.369	— 39.327	— 39.323	
	28	—	— 39.757	— 39.757	— 39.806	— 39.805	
	30	— 40.421	— 40.439	— 40.444	— 40.455	— 60.468	
Novembre	1	— 41·252	— 41.327	— 41 284	— 41.267	— 41.250	
	9	— 44.889	— 44.887	— 44.893	— 44.872	— 44.911	
	17	— 48.492	— 48.557	— 48.607	— 48.553	— 48.572	
	18	— 49 041	— 49.146	— 49.056	— 49.100	— 49.114	
	22	—	— 51.101	— 51.085	— 51.098	— 51.061	
	23	—	—	— 51.575	— 51.505	— 51.590	
	24	— 52.022	— 52 060	— 52.115	— 52.079	— 52.106	
	26	— 53.232	— 53:251	— 53.264	— 53.267	— 53.249	
	27	—	— 53.889	— 53.870	— 53.893	— 53.885	

TABELLA III.

Data	Tempo del passaggio in meridiano di Saturno (primo bordo)	Semidiametro equatoriale	α oss.	O-C	Condizioni meteorologiche
Settembre 24	21 40 43.616	613	44.229	+ .18	
25	32.048	612	32.660	+ .16	
26	20.751	611	21.362	+ .11	Cielo ad intervalli coperto, specialmente al Nord.
27	9.813	610	10.423	+ .13	
28	21 39 59.212	610	59;822	+ .18	
29	48.843	609	49.452	+ .13	Fumi del Vesuvio diffusi.
30	38.755	608	39.363	+ .04	» » » »
Ottobre 1	29.166	607	29.773	+ .13	
2	19.845	607	20.452	+ .16	
3	10.754	606	11.360	+ .07	
5	21 38 53.743	604	54.347	+ .05	Cielo sereno all'inizio, poi nubi ad intervalli e vento.
12	5.720	598	6.318	+ .13	
14	21 37 55.215	596	55.811	+ .01	
19	36.146	591	36.737	+ ,14	
23	27.785	587	28.372	+ .09	
24	26.694	587	27.281	+ .09	
25	26.081	586	26.667	+ .17	
26	25.743	585	26.328	+ .11	
27	25.874	584	26.458	+ .14	
28	26.385	583	26.968	+ .14	Nubi ad intervalli.
30	28.649	581	29.230	+ .17	
Novembre 1	32.474	579	33.053	+ .14	
9	21 38 4.060	571	4.631	+ .21	Immagini non buone.
17	21 39 1.003	563	1.566	+ ,12	
18	9.951	562	10.513	+ .18	
22	49.093	558	49.651	+ .06	Nubi ad intervalli.
23	59.810	558	60.368	+ .04	Vento.
24	21 40 10.981	557	11,538	+ .09	»
26	34.259	555	34.814	+ .05	»
27	4.511	554	5.065	+ .11	
				+ 0.12	

Sulla topologia degli S_3 e la polidromia di intreccio

Nota del socio corrispondente **Giulio Andreoli**

(Adunanza del dì 9 marzo 1935 - XIII)

Sunto. — Si mostra come — per lo studio delle caratteristiche topologiche degli S_3 — occorra tener presente un concetto analogo a quello di polidromia. Tale concetto che si riferisce simultaneamente a nodi e catene (con una sola parola « intrecci ») è necessario per completare la definizione topologica di S_3 equivalenti. In altri termini la caratterizzazione topologica di un S_3, è connessa a quella dei nodi e delle catene.

1. È noto che per l'equivalenza topologica di due superficie occorre e basta che certi numeri: lateralità, orli, genere, oppure lateralità, orli, connessione, sieno eguali fra loro.

La dimostrazione si può fare o seguendo una via di spezzamento oppure una di costruzione.

È noto altresì che per gli spazi a tre dimensioni, qualcosa di analogo può farsi: e ridursi — a seconda degli invarianti fondamentali prescelti — ai numeri di Betti etc., oppure a lateralità, orli dei diversi generi superficiali, al genere spaziale etc.

Tuttavia, come il Volterra ha per primo rilevato, tali condizioni risultano necessarie, ma non sufficienti: esistono cioè spazi aventi eguali i numeri anzidetti, e che non sono topologicamente equivalenti.

Il motivo di tale insufficienza risulta chiaro, ove si introduca il concetto di polidromia di intreccio: riunendo in quest'ultima parola tanto l'annodamento quanto il concatenamento.

Si intende che ci occupiamo della cosidetta topologia combinatorica; quindi tutte le regolarità, nessun elemento di eccezione; e si presuppongono tutte le premesse critiche e costruttive del Severi.

La sopradetta polidromia conduce a dover considerare un gruppo infinito; risulterà dunque evidente che solo un concetto gruppale può dare l'equivalenza topologica di due S_3 e non semplicemente un concetto di caratteri numerici.

2. Caratterizziamo anzitutto il concetto di polidromia d'intreccio. Nello spazio considerato sia tracciata una certa linea l, chiusa, *non annodata:* supporremo per il momento definito esattamente tale concetto, di linea non annodata.

Attorno ad l, sia tracciata una superficie λ, di cui l formi l'a-

nima; cioè un tubo (infinitamente, se si vuole) sottile, descritto ad esempio come superficie canale.

Su λ, sia tracciata una linea l_1, *non intrecciata* con l, e non annodata su sè stessa: il non intrecciata ha qui valore di *non concatenata* (anche questo, supposto per ora già esattamente definito).

Stacchiamo l_1 da λ; facciamole percorrere una semplice infinità di posizioni nell'S_3, sempre mantenendola non intrecciata, fra due posizioni sufficientemente vicine. Ciò significa che, tracciata a sua volta una superficie canale λ_1 attorno ad l_1, su di essa è stata fissata una l_2: non intrecciata rispetto ad l_1, così come questa non lo era rispetto ad l. Successivamente attorno ad l_2 si tracci λ_2 e si fissi l_3, e così via sino a ritornare con una l_n su λ_n, che è anch'essa attorno ad l: e quindi $\lambda_n \equiv \lambda_1$. Con questo si è venuto a percorrere con i punti P di l tutta una successione di porzioni di superficie $(l_1\ l_2)$, $(l_2\ l_3)$... equivalenti a corone circolari; due a due consecutivamente saldate lungo l'orlo comune.

Orbene può accadere:

a) che l_n si trovi con l_1 ad essere topologicamente, *su* λ_1, trasformabile l'una nell'altra. Ed è quello che avviene nell'ordinario S_3;

b) che l_n *non* sia in questi condizioni con l_1: e quindi o risulti annodata con sè stessa o concatenata con l o infine e l'una e l'altra cosa.

Se, partendo da l, si segue tutto un altro ciclo $(l_1'\ l_2')$, $(l_2'\ l_3')$... si avrà come risultato finale un l_p il quale a sua volta si ripresenta o equivalente a l o equivalente ad l_n, o ad ambedue (se equivalenti fra loro), *nel senso superficiale* già indicato, o a nessuno.

E così per ogni altro ciclo.

In altri termini, in relazione ai cicli superficiali percorsi — e che constano di corone circolari saldate due a due per un orlo, si presenta come risultato finale che il primo orlo — fisso — e l'ultimo orlo possono o no essere equivalenti dal punto di vista dell'intreccio (nodo o catena).

Si ha dunque la formazione di un gruppo, del tutto analogo a quello di monodromia per le funzioni polidrome, salvo che invece di percorrere con punti delle linee, si percorrono con linee delle superficie.

Vi saranno cicli superficiali equivalenti; e pertanto il gruppo di monodromia d'intreccio sarà rappresentato mediante un certo numero finito di quei cicli superficiali — assumendo questo come fondamentale. Uno dei qualsiasi intrecci ottenibili nello spazio considerato si deve ottenere percorrendo un certo numero di volte il primo ciclo superficiale fondamentale, poi il secondo un altro certo numero di volte e così via; ricominciando quindi daccapo col primo etc. etc.

3. In altri termini — dato lo spazio, esiste la polidromia di intreccio, la quale porta che uno o più cicli non intrecciati (non annodati, nè concatenati fra loro) si possono mutare, con continuità nello stesso spazio ambiente in altri annodati o concatenati fra loro; e che altri — intrecciati fra loro — si muteranno in tutta un' altra infinità numerabile.

Pertanto, a caratterizzare lo spazio, occorre precisamente fissare il gruppo di monodromia.

Diamo subito degli esempi di come ciò possa avvenire.

A) Si abbia una sfera piana; in essa siano due cavità toriche; le due cavità sieno concatenate semplicemente fra loro, come le maglie di una catena: esse cavità sieno — con la sfera gli orli dell' S_3 considerata.

Da tale S_3, ricaviamone un altro, saldandone i due orli torici punto per punto (esternamente nell' S_4, se si vuole, dopo aver portato nell' S_5 quegli orli ad essere estremi — come si fa per le corone circolari dell' S_2, modificate nell' S_3 in porzioni di cilindro) facendo corrispondere a meridiani i meridiani e a paralleli i paralleli, senza torsione su se stesso di alcuno dei tori.

Un anello che si adagi su un parallelo del primo toro passa all' altro, risultando quindi concatenato, secondo lo schema già indicato,

B) Se i due orli torici sono uno non annodato e l' altro annodato. si otterrà un nodo con un passaggio analogo.

C) Se i due orli torici non sono nè concatenati, nè annodati fra loro, ma tuttavia nel saldarli vi è una torsione, sicchè ad esempio i paralleli del primo vengano ad adagiarsi — nella saldatura su quel sistema semplicemente infinito di linee ottenute con « torsione » dei paralleli dell' altro (cioè su quelle linee semplicemente concatenate ai paralleli che su esso si trovano) non si avrà nè concatenamento nè annodamento, ma semplicemente torsione nel senso di Betti.

4. Per vedere quanto accade in questi casi, e per seguire la struttura topologica degli S_3, occorre tutto uno sviluppo analogo a quello fatto in una nostra nota ed in una nostra Memoria [1]).

Senza sviluppare qui per esteso, diciamo che si tratta di partire da una sfera, sulla quale è distesa una rete poligonale; saldare opportunamente facce di questa rete poligonale fra loro, sino ad avere una sola superficie orlo di genere il più alto possibile.

---

[1]) Cfr. G. Andreoli. *Nuova dimostrazione di un teorema di Poincaré.* Rend. R. Ist. Lomb. 1915 *Sulle caratteristiche topologiche di una superficie* Giorn. Mat. Batt. 1921, Napoli.

Con « zone » attorno a questa superficie, si fanno altre saldature, sì da spezzarla nelle diverse superficie — orli dei diversi generi, presenti — ed eventualmente si possono chiudere orli sferici che si possono presentare.

È qui che si presenta la possibilità degli intrecci o delle torsioni; ed è questa la parte sulla quale occorre delineare gli ulteriori caratteri, gruppali e topologici degli S_3.

Ad esempio se nell'interno di una sfera piena si ha una cavità rappresentata da un doppio anello, e si spezza questo orlo in due anelli, saldando una sfera, lungo una zona equatoriale ad una fascia analoga che circondi semplicemente la saldatura dei due anelli, si ottiene una sfera con due orli torici senza polidromia d'intreccio.

Se la stessa saldatura avviene lungo una fascia che circondi, abbracciandola, la zona di saldatura e non riducibile, sul doppio anello a quella prima considerata, si presenta una polidromia di concatenamento.

In altri termini, delineando qui quanto svilupperemo in opportuna memoria, si può osservare che un qualsiasi S_3 si può ottenere:

A) con un primo complesso di operazioni che consistono nel saldare via via sfere (a partire da una fondamentale) con saldature effettuate fra ognuno di *due* calotte della sfera saldata, e due corrispondenti dischetti della superficie orlo che è ottenuta in ogni successivo stadio.

Si otterrà in tal modo un S_3, multiplamente connesso (dal punto di vista delle linee), avente un solo orlo.

Le saldature possono essere fatte conservando l'indicatrice (sferetta o terna orientata) o invertendola — vi sono, in relazione a ciò delle riduzioni e delle classificazioni da fare.

B) Sull'orlo unico ottenuto in tal guisa, sia tracciato adesso un sistema di fasce, equivalenti ad una corona circolare; il secondo complesso di operazioni consta nel saldare queste fasce a fasce equatoriali di sfere.

Con queste operazioni — che volta a volta — possono conservare o invertire l'indicatrice — si ottiene un S_3 multiplamente connesso (dal punto di vista delle superficie) il quale avrà non più un solo orlo, ma degli orli che provengono dallo spezzamento di quello unico prima preesistente.

Per di più a seconda delle caratteristiche che il sistema di linee (corrispondenti ad esempio alla linea mediana di esse fasce ad uno dei due orli lineari) presenta su quell'orlo superficiale unico, si presenterà polidromia d'intreccio e torsione

C) Il terzo complesso d'operazioni equivale a chiudere eventuali

orli: e se si tiene presente il secondo, si vede che esso può ridursi a chiudere — con saldatura completa — eventuali orli sferici.

5. Da quanto precede, per quanto sommariamente delineato, risulta che:

I. Per la topologia degli S_3, occorre premettere una teoria completa degli intrecci (nodi e catene).

II. Un S_3 è topologicamente determinato soltanto se (a fianco della sua connessione lineare, di quella superficiale, del numero di orli superficiali dei diversi generi, della sua torsione) sia conosciuto il suo gruppo di polidromia d'intreccio.

III. Il detto gruppo è caratterizzato attraverso un sistema di linee non intersecantesi (linee mediane delle fasce) tracciate sull'orlo unico che è servito alla costruzione dell'S_3.

Le caratteristiche di tale sistema, sulla superficie orlo, e le condizioni di equivalenza ad altro sistema sulla stessa superficie costituiranno rispettivamente caratteristiche dell'S_3 e condizioni sufficienti per l'equivalenza degli S_3.

Con tali premesse, si hanno allora due gruppi di problemi:

a) date le caratteristiche e dato il gruppo di polidromia, esiste un S_3 che le possegga?

b) dato l'S_3, trovato il suo gruppo di polidromia e trovate le sue caratteristiche, come è costruito l'S_3 a partire dagli enti topologici elementari (sfere) per mezzo di operazioni del I, II e III tipo dianzi indicate?

Su le curve razionali piane d'ordine n

Nota del socio corrispondente **G. Gallucci**

(Adunanza del dì 6 aprile 1935 - XIII)

Sunto. — In questa nota è presentato il risultato del calcolo esplicito dei termini dell'equazione dei flessi di una curva razionale piana di ordine n. Segue lo studio di alcune funzioni φ simmetriche in λ_1, λ_2, λ_3 che si presentano nel calcolo dei termini dell' equazione della collineazione di tre punti della stessa curva razionale.

1. *L'equazione dei punti d' inflessione.* — Sia γ una curva piana razionale di ordine n, i suoi punti saranno rappresentati mediante un parametro λ:

$$\begin{cases} \rho\, x_1 = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots . a_{n-1} \lambda + a_n = f_1(\lambda) \\ \rho\, x_2 = b_0 \lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + \ldots . b_{n-1} \lambda + b_n = f_2(\lambda) \\ \rho\, x_3 = c_0 \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \ldots . c_{n-1} \lambda + c_n = f_3(\lambda) \end{cases}$$

Consideriamo la matrice:

$$\left\| \begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 \ldots . \ldots a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 \ldots . \ldots b_n \\ c_0 & c_1 & c_2 \ldots . \ldots c_n \end{matrix} \right\|$$

e poniamo:

$$\alpha_{rs} = \begin{vmatrix} b_r & b_s \\ c_r & c_s \end{vmatrix}; \quad \beta_{rs} = \begin{vmatrix} c_r & c_s \\ a_r & a_s \end{vmatrix}; \quad \gamma_{rs} = \begin{vmatrix} a_r & a_s \\ b_r & b_s \end{vmatrix}$$

ed inoltre:

$$\delta_{ijk} = \begin{vmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{vmatrix}$$

Il parametro λ di un punto d'inflessione di γ deve soddisfare alla equazione:

$$\begin{vmatrix} f_1(\lambda) & f_2(\lambda) & f_3(\lambda) \\ f'_1(\lambda) & f'_2(\lambda) & f'_3(\lambda) \\ f''_1(\lambda) & f''_2(\lambda) & f''_3(\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Svolgendo il calcolo e servendosi opportunamente dei determinanti α_{rs}, β_{rs}, γ_{rs}, δ_{ijk} e delle loro relazioni si trova in fine l'equazione seguente:

$$\sum \frac{1}{2}\,(k-i)\,(k-j)\,(j-i)\;\delta_{ijk}\;\lambda^{3n-3-(i+j+k)} = 0 \qquad (1)$$

Ad ogni δ_{ijk} si può associare il coniugato $\delta_{n-k,\,n-j,\,n-i}$ che ha lo stesso coefficiente di δ_{ijk} ed è accompagnato da $\lambda^{k+j+i-3}$. Sicchè scritti i due termini medi per n dispari ed il termine medio per n pari, il 1° termine è *coniugato* dell'ultimo, il 2° del penultimo ecc.

Così per $n = 5$ si ha:

$$\begin{aligned}
&(15\,\delta_{012}+6\,\delta_{034}+3\delta_{124})\,\lambda^5+(15\,\delta_{035}+6\,\delta_{125}+3\,\delta_{134})\,\delta^4\\
&+(10\,\delta_{015}+8\,\delta_{024}+\delta_{123})\,\delta^6 \qquad +(10\,\delta_{045}+8\,\delta_{135}+\delta_{234})\,\lambda^3\\
&+(6\,\delta_{014}+3\,\delta_{023})\,\lambda^7 \qquad +(6\,\delta_{145}+3\,\delta_{235})\,\lambda_2\\
&+3\,\delta_{013}\,\lambda^8 \qquad +3\,\delta_{245}\,\lambda\\
&+\delta_{012}\,\lambda^9 \qquad +\delta_{345}=0
\end{aligned}$$

e per $n = 6$ si ha:

$$\begin{aligned}
&(27\,\delta_{036}+10\,\delta_{045}+10\,\delta_{126}+8\,\delta_{135}+\delta_{234})\,\lambda\\
&+(24\delta_{026}+15\delta_{035}+6\delta_{125}+3\delta_{134})\lambda^7 \quad +(24\,\delta_{046}+15\delta_{136}+6\delta_{145}+3\delta_{235})\,\lambda^5\\
&+(15\delta_{016}+15\delta_{035}+6\delta_{034}+3\delta_{124})\lambda^8 \quad +(15\delta_{056}+15\delta_{146}+6\delta_{236}+3\delta_{245})\,\lambda^4\\
&+(10\delta_{015}+8\delta_{024}+\delta_{123})\lambda^9 \qquad +(10\delta_{156}+8\delta_{246}+\delta_{345})\,\lambda^3\\
&+(6\delta_{014}+3\delta_{023})\,\lambda^{10} \qquad +(6\delta_{256}+3\delta_{346})\,\lambda^2\\
&+3\delta_{013}\,\lambda^{11} \qquad +3\delta_{356}\,\lambda\\
&+\delta_{012}\,\lambda^{12} \qquad +\delta_{456}=0
\end{aligned}$$

2. *Sviluppo del determinante* R' — La condizione perchè 3 punti di parametri $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ siano in linea retta è espressa dall'eguaglianza:

$$R=\begin{vmatrix} f_1(\lambda_1) & f_2(\lambda_1) & f_3(\lambda_1)\\ f_1(\lambda_2) & f_2(\lambda_2) & f_3(\lambda_2)\\ f_1(\lambda_3) & f_2(\lambda_3) & f_3(\lambda_3)\end{vmatrix}=0$$

R è divisibile per $(\lambda_1-\lambda_2)\,(\lambda_3-\lambda_1)\,(\lambda_3-\lambda_2)$;

posto $R'=\dfrac{R}{(\lambda_1-\lambda_2)\,(\lambda_3-\lambda_2)\,(\lambda_3-\lambda_2)}$, lo sviluppo di R', ottenuto mediante l'uso degli α, β, γ e dei δ_{ijk} si presenta setto la forma seguente:

$$\Sigma\,\delta_{ijk}\,\varphi_{ijk}=0 \qquad (2)$$

ove le φ_{ijk} sono funzioni simmetriche di $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ le quali, per $\gamma_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ diventano $\frac{1}{2}\ (k-i)\ (k-j)\ (j-i)\ \lambda^{3n-3n-(i+j+k)}$.

L'espressione delle φ_{ijk} è la seguente:

$$\lambda_3^{n-i-2}\ \lambda_1^{n-k}\ \lambda_2^{n-k}\ \varphi_{k-j-1}\ \varphi_o + \lambda_3^{n-i-3}\ \lambda_1^{n-k}\ \lambda_2^{n-k}\ \varphi_{k-j-1}\varphi_1 + \ldots + \lambda_3^{n-j-1}\ \lambda_1^{n-k}\ \lambda_2^{n-k}\ \varphi_{k-j-1}\ \varphi_{j-i-1} + \lambda_3^{n-j-2}\ \lambda_1^{n-k+1}\ \lambda_2^{n-k+1}\ \varphi_{j-i-1}\ \varphi_{k-j-2} + \lambda_3^{n-j-3}\ \lambda_1^{n-k+2}\ \lambda_2^{n-k+2}\ \varphi_{j-i-1}\ \varphi_{k-j-3} + \ldots + \lambda_3^{n-k}\ \lambda_1^{n-j-1}\ \lambda_2^{n-j-1}\ \varphi_{j-i-1}\ \varphi_o$$

Essa è composta di due gruppi di termini: nel 1° gruppo vi sono i fattori comuni $\lambda_1^{n-k}\ \lambda_2^{n-k}$, φ_{k-j-1} e le altre φ si presentano con indici crescenti da O a $j-i-1$; nel 2° gruppo vi è il fattore comune φ_{j-i-1} e le altre φ si presentano con indici decrescenti da $k-j-2$ a zero. Le φ_ρ ad un indice rappresentano $\lambda_1^\rho + \lambda_1^{\rho-1}\lambda_2 + \lambda_1^{\rho-1}\lambda_2^2 + \ldots + \lambda_1\ \lambda_2^{\rho-1} + \lambda_2^\rho$ per ρ diverso da zero. Per $\rho = O$ si pone $\varphi_o = 1$.

Le funzioni φ_{ijk} sono di grado complessivo $3n-3-(i+j+k)$. Ponendo λ al posto di λ_1, λ_2, λ_3 il primo gruppo di termini dà $\lambda^{3n-3-(i+j+k)}$ $\big((k-j)\,1 + (k-j)\,2 + \ldots . (k-j)\,(j-i)\big) = \lambda^{3n-3-(i+j+k)}\ \frac{1}{2}\ (k-j)\ (j-i)\ (j-i+1)$ ed il 2° gruppo di termini dà $\lambda^{3n-3-(i+j+k)}\ (j-i)\ (k-j-1) + (j-i)\ (k-j-2) + \ldots . + (j-i)\,1 = \lambda^{3n-3-(i+j+k)}\ \frac{1}{2}(k-j)(j-i)(k-j-1)$

Sommando si avrà $\lambda^{3n-3-(i+j+k)}\ \frac{1}{2}\ (k-i)\ (j-i)\ (k-j)$.

Dall'equazione (2) per $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ si ricava l'equazione (1) dei flessi.

Le funzioni coniugate $\varphi_{ijk}\ \varphi_{n-k,\ n-j,\ n-i}$ sono dei gradi rispettivi $3_n-3-(i+j+k)$, $i+j+k-3$ e compariscono nei termini estremi e nei termini equidistanti dagli estremi dell'equazione (2) accompagnati dai δ associati o coniugati.

Così la funzione φ coniugata di φ_{012} è $\varphi_{n-2,\ n-1,\ n}$ e risulta eguale ad 1; la funzione complementare di φ_{013} è $\varphi_{n-3\ n-2,\ n}$ e risulta eguale a $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$; la funzione complementare di φ_{014} è $\varphi_{n-4,\ n-1,\ n}$ e risulta eguale a $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + (\lambda_1\ \lambda_2 + \lambda_1\ \lambda_3 + \lambda_2\ \lambda_3)$ ecc.

Gli sviluppi delle equazioni (1) e (2) possono estendersi alle curve razionali nello spazio.

Sugli indici di diffusione nei fenomeni statistici di ricambio sociale.

Nota del socio corrispondente **Giulio Andreoli**

(Adunanza del dì 6 Aprile 1935 - XIII)

Sunto. — L' A. applica ai fenomeni del ricambio sociale gli stessi metodi statistici usati per l' omogamia nei matrimoni. Il concetto fondamentale è quello di considerare la coppia « padre-figlio ».

1. In alcune Note, pubblicate in questi Rendiconti, abbiamo trattato della definizione di certi indici atti a caratterizzare l'omogamia e l'attrazione matrimoniale nei fenomeni demografici.

Abbiamo, specialmente nell'ultima di dette Note, posto in rilievo come si trattasse sostanzialmente di dare indici atti a seguire la formazione di individui di secondo ordine (coppie matrimoniali) in seno a collettività di individui di primo ordine.

Nella stessa cerchia di definizioni statistiche e matematiche può rientrare — come quì mostreremo — il fenomeno del ricambio sociale pel quale si verificano movimenti di ascesa e di discesa di individui attraverso gli strati in cui può suddividersi una collettività. Vero è che noi consideriamo tale ricambio soltanto nel passaggio da una generazione all' altra; ma quanto qui diciamo si può applicare,— lievemente modificato — ad una sola generazione. (*)

2. Abbiamo parlato di diffusione nel ricambio sociale: divisa tutta una generazione in classi sociali (per reddito, o per patrimo-

---

(*) Fra i primi che si occuparono di questo fenomeno vanno citati l' Ammon, il Dumond, il De Laponge, i quali spiegarono l' infiltrazione di elementi delle classi inferiori in quelle superiori con la presenza di certe doti fisiche e psichiche particolari (« razze superiori »).

Successivamente il Gini ha messo in luce l' importanza che ha il fattore demografico — il diverso accrescimento, cioè — nel produrre sia il ricambio sociale (Cfr. Gini, *Nascita, Evoluzione e Morte delle Nazioni*, Roma, Libreria del Littorio 1930) sia altri fenomeni che vi sono connessi.

Fra le altre ricerche sul ricambio sociale meritano particolare nota quelle del Dr. G. de Meo per alcune collettività dei secoli XVII e XVIII riassunte in una comunicazione da presentarsi al Congresso Internazionale di Sociologia nell'agosto 35 a Bruxelles (Cfr. ad es. G. de Meo, *Distribuzeone della ricchezza e composizione demografica di alcune città dell' Italia etc.* Annali di Statistica, Serie V, Vol. XX, Roma).

nio, o per occupazioni etc.), si consideri la generazione seguente, formata dai figli di quella.

Anche questa nuova generazione si distribuisce in classi — secondo lo stesso criterio di prima; e se le condizioni ambientali e di vita sociale non sono molto cambiate la distribuzione risulterà all'incirca quella di prima.

Però dei cambiamenti saranno avvenuti nelle singole famiglie: figli di individui appartenenti ad una classe sociale saranno passati ad un'altra. In queste consiste il fenomeno del ricambio sociale. La diffusione è ad esso collegata: ed in effetti, se prendiamo in esame (ad esempio) la divisione della società in una classe dirigente una classe media ed una costituita dai lavoratori manuali, avverrà che i figli di una persona appartenente ad una di esse si troveranno (più o meno fortemente) rappresentati nelle altre: ogni classe *diffonde* nelle altre nel passaggio da una generazione all'altra.

Scopo di questa Nota è appunto di dare degli indici atti a seguire questa diffusione, atti cioè a caratterizzare la circolazione delle linee familiari attraverso la società in diversi stadi del tempo. Il procedimento parte da presupposti analoghi a quelli delle già citate Note sull'omogamia e sull'attrazione matrimoniale.

La popolazione totale presa in esame corrisponde a quella dei padri e dei figli: quest'ultimi considerati solo se abbiano raggiunta un'età che permetta loro di assumere una posizione sociale; quindi — ad esempio — se si tratta di classi di occupazioni professionali, circa la trentina; se si tratta di patrimonio e di quistioni legali, il solo fatto di essere nati basta; se si tratta di considerarli agli effetti della riproduttività, occorre considerarli alla loro morte e così via.

La distinzione in padri e figli è, come quella matrimoniale, allelomorfa in quanto non vi può essere coincidenza fra le due qualifiche, come non vi era coincidenza fra individui maschi e femmine.

Gli individui di secondo ordine sono costituiti dalla coppia padre-figlio — e quì vi è differenza con la coppia matrimoniale, in quanto un individuo di primo ordine, padre, può appartenere simultaneamente a più coppie, e conta quindi come multiplo. Inoltre, mentre i riferimenti percentuali andavano fatti — nel primo esempio — alla popolazione totale, quì andranno riferiti al numero di coppie esistenti, cioè in ultima analisi al numero dei figli.

3. Impostiamo ora il problema. Come nell'altro esempio, si tratta di definire opportune tabelle, da confrontare fra loro, per ricavarne gli indici: e precisamente una *spontanea*, una *casuale*, una *effettiva*.

Per semplicità consideriamo soltanto una divisione dicotomica.

Sia dunque assegnata una popolazione P in un certo anno, di-

visa dicotomicamente nelle due classi E, N (ad esempio militari di carriera, e borghesi). Sia P'_1 la popolazione formata dai figli di questa prima; anch'essa divisa nelle due classi E', N'.

Il rapporto $\frac{P'}{P}$ sia ρ, rapporto di riproduzione, che sta ad indicare il numero medio di figli della prima generazione che ha raggiunto la maturità economica (dal punto di vista dell'occupazione).

Siano inoltre r ed s i rapporti di riproduzione della classe E e della classe N, definiti in modo analogo a ρ. È chiaro che

$$P' = \rho P = \rho(E + N) = rE + sN$$

Diremo allora tabella spontanea quella che nasce dal considerare gli $\rho P = P'$ figli distribuiti nelle classi E', N' a caso: in altri termini, se si considera ognuno dei P individui della prima generazione come contante per ρ individui (in quanto concorre precisamente a formare ρ individui di II ordine, cioè coppia padre-figlio) si avrà la tabella di distribuzione « *spontanea* » su numeri effettivi:

$\rho \frac{EE'}{P'}$	$\rho \frac{NE'}{P'}$	E'
$\rho \frac{EN'}{P'}$	$\rho \frac{NN'}{P'}$	N'
ρE	ρN	P'

Questa tabella, ridotta a percentuali, rispetto all' unità, ove si ponga,

$$\varepsilon = \frac{E}{P};\ \nu = \frac{N}{P};\ \varepsilon' = \frac{E'}{P'};\ \nu' = \frac{N'}{P'}$$

diventa

$\varepsilon\,\varepsilon'$	$\nu\,\varepsilon'$	ε'
$\varepsilon\,\nu'$	$\nu\,\nu'$	ν'
ε	ν	1

4. Ma abbiamo già detto che le classi E ed N hanno ciascuna per proprio conto un diverso coefficiente di riproduzione: occorrerà considerare tale diversa potenzialità di accrescimento. Si formerà dunque una tabella, anch'essa ottenuta come se le coppie padre-figlio

si formassero a caso, ma tenendo presenti r ed s invece che ρ globale.

Si avrà così la tabella « casuale » su numeri effettivi.

$\frac{rEE'}{P'}$	$\frac{sNE'}{P'}$	E'
$\frac{rEN'}{P'}$	$s\frac{NN'}{P'}$	N'
rE'	sN	P'

Queste tabella, ridotta a percentuali, conduce a

$\frac{r}{\rho}\varepsilon\varepsilon'$	$\frac{s}{\rho}\nu\varepsilon'$	ε'
$\frac{r}{\rho}\varepsilon\nu'$	$\frac{s}{\rho}\nu\nu'$	ν'
$\frac{r}{\rho}\varepsilon$	$\frac{s}{\rho}\nu$	1

Infine la terza tabella, quella « *rilevata* » o effettiva, sarà in numeri concreti:

A_{11}	A_{12}	E'
A_{21}	A_{22}	N'
rE	sN	

ove A_{11} indica il numero delle coppie padre-figlio, per le quali ambedue i termini appartengono alla classe prima (E) e così via.

Ridotta in percentuali essa darà i numeri:

α_{11}	α_{12}	ε'
α_{21}	α_{22}	ν'
$\frac{r}{\rho}\varepsilon$	$\frac{s}{\rho}\nu$	1

ove sarà $\alpha_{11} + \alpha_{12} = \frac{r}{\rho}\varepsilon$; $\alpha_{12} + \alpha_{22} = \frac{s}{\rho}\nu$ etc.

In ognuna di queste tabelle, la prima in alto e la seconda in basso danno insieme la totalità delle coppie che sono rimaste nella loro classe: per le quali cioè il padre ed il figlio hanno la stessa posizione; le altre due, insieme, dànno invece quelle per le quali è avvenuto un declassamento a migliorare o a peggiorare.

5. Gli indici da formare sono dunque patenti. Si consideri per ogni tabella la somma degli individui di secondo ordine che presentano permanenza di stato e se ne faccia la differenza con quelli che hanno avuta variazione: si applichi cioè l'operazione D (vedi loc. cit.). Indi si avrà un primo indice formato dalla differenza di tali risultati per la seconda e la prima tabella; un secondo come differenza fra terza e seconda; un terzo, somma dei primi due come differenza fra terza e prima.

Il primo indice misura in un certo senso la diversità fra l'accrescimento effettivo delle diverse classi e quello medio; il secondo misura in un certo senso la diversità fra scelta casuale dello stato e permanenza ereditaria; il terzo misura il declassamento complessivo.

Pertanto proponiamo per il primo indice il nome di « *indice di potenzialità* » ω_1; per il secondo « *indice di sfasamento* » ω_2 e per il terzo « *indice di persistenza* » ω_3.

Considerando le tabelle percentuali, si vede che l'operazione D, avrà come risultato per le tre tabelle, rispettivamente

$$(\varepsilon - \nu)(\varepsilon' - \nu'); \left(\frac{r}{\rho}\varepsilon - \frac{s}{\rho}\nu\right)(\varepsilon' - \nu'); \alpha_{11} + \alpha_{22} - \alpha_{12} - \alpha_{21}$$

Posto ora $\varepsilon = \frac{1}{2} + h$, $\nu = \frac{1}{2} - h$; $\varepsilon' = \frac{1}{2} + h'$, $\nu' = \frac{1}{2} - h'$;

$\frac{r}{\rho}\varepsilon = \frac{1}{2} + \lambda$ $\frac{s}{\rho}\nu = \frac{1}{2} - \lambda$ le tre tabelle percentuali si possono anche scrivere in questi nuovi simboli, avendosi come risultato dell'operazione D rispettivamente per la prima e la seconda:

$$4h'h;\ 4h'\lambda$$

In quanto alla terza è chiaro che si potrà sempre porre (dovendo essere costante le somme per linee e colonne fra seconda e terza tabella)

$$\alpha_{11} = \frac{r}{\rho}\varepsilon\varepsilon' + \sigma; \qquad \alpha_{12} = \frac{s}{\rho}\nu\varepsilon' - \sigma$$

$$\sigma_{21} = \frac{r}{\rho}\varepsilon\nu' \quad \sigma; \qquad \alpha_{22} = \frac{s}{\rho}\nu\nu' = \sigma$$

ovverosia la terza tabella è otteuuta dalla seconda sommando ordinatamente ai suoi elementi quelli di

$$\begin{vmatrix} \sigma & -\sigma \\ -\sigma & \sigma \end{vmatrix}$$

Quindi, la differenza fra il risultato di D applicato alla terza e quello di D applicato alla seconda, è precisamente 4σ che misura lo « sfasamento », o se si vuole, il passaggio, di individui dalla classe cui apparterrebbero in base al caso a quella cui effettivamente appartengono.

6. Si intende ora benissimo che il procedimento stesso può servire a determinare anche il passaggio (o la diffusione) da una classe all'altra: basta perciò — in divisione dicotomica, considerare invece di E' e N' altre due classi di ripartizioni F' e G', oppure considerare divisioni non dicotomiche e i diversi tipi di indici corrispondenti — nel caso attuale — a quelli già definiti di omogamia pura od attenuata.

Esaminiamo tale caso, sì da arrivare a conclusioni generali.

L'estensione ai casi di divisione non dicotomica é del resto immediata anche come procedimento di calcolo. Effettuate che sieno le riduzioni a frazioni, sicchè il numero totale si assume unitario, la somma dei termini della diagonale pnincipale e di tutti gli altri è l'unità stessa; quindi la differenza fra quella prima somma ed i residui sarà data dal doppio della prima somma diminuito dell'unità: ovvero tale sarà il risultato dell'operazione D su ogni tabella. E dovendosi fare le differenze fra tali risultati, si avrà ovviamente come indici — il doppio delle differenze fra le somme delle rispettive diagonali.

Pertanto, ove si tenga presente tutto quanto precede, si può concludere che:

I. Per avere indici di diffusione, occorre considerare gli individui di secondo ordine costituiti dalle coppie padre-figlio.

II. Di tali coppie si costituiscano le classificazioni in base ad una tabella a doppia entrata « classe del padre » « classe del figlio » e si riduce la massa totale di coppîe a quella unitaria.

III. Di tali tabelle se ne costituiscano tre: la prima costituita dalle c classi dei figli e da quelle e dei padri, ciascuno di questi gravato di un peso proporzionale alla prolificità media (tabella spontanea); ponendo in ogni casella del quadro il numero di coppie proveniente da distribuzione a caso; la seconda costituita egualmente per i figli mentre per i padri si tiene conto della prolificità media in ogni classe costituita (tabella casuale); la terza infine — con le stesse

classi di questa per i figli e per i padri contenga nelle caselle il numero di coppie rilevato e ridotto a massa unitaria.

IV. Fissato per le coppiè il carattere allelomorfo « declassato — non declassato » si considerino le coppie non declassate per ciascuna tabella; il che si ottiene sommando gli elementi della diagonale principale (da sinistra in alto, a destra in basso).

Le differenze fra tali somme per la tabella effettiva e quella casuale; fra questa e quella spontanea; fra la prima e l'ultima, raddoppiate danno i tre indici.

V. Il terzo indice è ovviamente lineare; formando cioè una collettività per riunione di altre due, l'indice spettante al complesso è la media ponderata dei due parziali.

VI. L'annullarsi del primo indice significa che è nullo l'effetto del declassamento dovuto alle cause non di natalità; l'annullarsi del secondo che è nullo l'effetto del declassamento dovuto alla diversa prolificità delle classi; l'annullarsi del terzo significa infine che vi è compenso fra i due ordini di cause.

Precisazioni sul calcolo esatto delle tensioni tangenziali in un cilindro sollecitato a flessione taglio e torsione

Nota del socio corrispondente **Carlo Luigi Ricci**

(Adunanza del dì 18 aprile 1935 - XIII)

Sunto. — Per opportuno riferimento si richiamano dai noti trattati d teoria tecnica dell'elasticità le modalità del calcolo della *pura torsione* e dell *flessione composta* (*flessione, taglio e torsione*) di un cilindro elastico vincolat su una base e sollecitato sull' altra da una forza giacente nella base stessa

Si precisa anzitutto che l'usuale calcolo per il secondo caso è senz'altr valido anche se l'asse neutro, assunto come asse x, *non* è principale d'inerzi per la sezione.

Si constata che nel caso considerato usualmente come *flessione composta pur* (senza torsione) la *rotazione* delle tensioni tangenziali è semplicemente pro porzianale all' ascissa x, essendo nulla la costante d' integrazione che rest arbitraria nella condizione generale.

Si verifica che nel caso della *flessione composta pura* la base del cilindr libera e caricata non subisce alcuna rotazione intorno ad asse parallelo quello del cilindro, ed anzi in ogni suo punto è nulla la rotazione degl spostamenti (di componenti u e v) paralleli al piano della base stessa.

Se ne deduce che il taglio risultante per detto caso della *flessione com posta pura* deve essere incidente all'asse di torsione.

In conseguenza si individuano due parametri delle forze esterne appli cate nel piano della base libera: M_t momento rispetto all'asse di torsione T taglio trasportato ad essere incidente all'asse di torsione.

Questi due parametri sono *elasticamente* od *energeticamente indipendent perchè il loro lavoro mutuo* è nullo.

Il calcolo statico della *flessione composta completa* nella sua forma gene rale si fa sovrapponendo gli effetti dovuti separatamente ai parametri sud detti. La sovrapposizione degli effetti è opportunamente giustificata.

Si fanno cenni alle applicazioni mediante misure su modelli a lamin flessibile secondo le ben note analogie.

Infine si indicano a titolo programmatico altri argomenti che si ricon nettono con quelli qui studiati.

I. *Premesse e richiami.*

Ci riferiamo allo studio della ripartizione delle tensioni interne ed in particolare delle tensioni tangenziali, in un cilindro elastico compreso tra due basi piane normali alle generatrici, nell'ipotesi che

una delle basi piane sia trattenuta da vincoli fissi, e l'altra sollecitata da un sistema di tensioni tangenziali, la cui risultante sia una forza contenuta nel piano della base stessa.

Questo studio costituisce un caso particolare del ben noto problema di De Saint Venant, e si suole denominare *flessione composta*.

In particolare se la forza risultante sopra detta si riduce ad una coppia, (parallela, ben inteso, alle basi del cilindro), si ha il caso della *torsione*.

Adottiamo, qui la nomenclatura, le notazioni e le modalità di vincolo in uso nei trattati di teoria tecnica dell' elasticità.

Sia T la forza risultante delle azioni esterne, situata nel piano della base libera.

Sia z *l' asse geometrico* del cilindro, cioè la retta contenente i baricentri delle sezioni trasversali rette; il senso positivo di z si assuma dalla base vincolata, verso la base libera (ov'è situata la forza T). Sia l la lunghezza del cilindro.

Il piano per z, parallelo a T si chiama *piano di sollecitazione*, e la traccia s di questo su una sezione trasversale si dice *asse di sollecitazione* per la sezione stessa.

In una qualunque sezione trasversale si assume come asse x *l'asse neutro* per *la flessione*, il quale com'è ben noto, è l'asse baricentrico coniugato dell' asse di sollecitazione s rispetto all'ellisse centrale d'inerzia della sezione stessa.

Ancora nella stessa sezione generica si assuma l'asse y baricentrico, normale ad x.

Si indichino con T_x e T_y le componenti del taglio T secondo i due assi x ed y rispettivamente. Sia poi M_z il momento delle forze esterne rispetto all' asse z.

Sia I_x il momento d' inerzia della sezione rispetto all'asse (neutro) x, e sia I_p il momento d' inerzia polare della sezione rispetto al baricentro. Al solito indichiamo con E e G i due *moduli di elasticità* longitudinale e tangenziale rispettivamente e con m il *coefficiente di Poisson*, ricordando che:

$$G = \frac{mE}{2\,(m+1)}$$

Indichiamo con u, v, w le componenti secondo i tre assi dello spostamento di un punto generico del cilindro; con σ_z la tensione normale e con τ_{zx} e τ_{yz} le due componenti secondo gli assi x ed y della tensione tangenziale $\overline{\tau}_z$ (vettore) in un punto generico; tali tensioni si intendono agenti sulla sezione trasversale e sono le sole diverse da zero tra le componenti speciali di tensione, com'è ben noto nello studio del problema di De Saint Venant.

Le condizioni di vincolo adottate per la base tenuta fissa sono, come sempre nel problema di De Saint Venant date dalle relazioni:

$$u = v = w = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \,,$$

che devono essere verificate nel baricentro della base suddetta.

Richiamiamo dai più comuni trattati di teoria tecnica dell'elasticità le modalità e le principali caratteristiche della distribuzione delle tensioni e la natura della deformaziene per il caso qui considerato [1]).

Dalle equazioni indefinite dell'equilibrio si deduce che le τ_{yz} e τ_{zy} (e perciò anche la loro risultante $\overline{\tau}_z$) devono essere indipendenti dalla z; inoltre si ricava la seguente ben nota, espressione della *divergenza* del vettore $\overline{\tau}_z$:

$$\text{div.}\,\overline{\tau}_z = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = -\frac{T_y}{I_x}\, y$$

Dalle condizioni di congruenza a cui devono soddisfare le componenti di deformazione si ricava la seguente — pure assai nota — espressione della *rotazione* del vettore $\overline{\tau}_z$:

$$\text{rot.}\,\overline{\tau}_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y}\right) = \frac{T_y}{2\,(m+1)\,I_x}\, x + C$$

ove C è una costante, che le condizioni ora citate lasciano indeterminata.

In particolare se $T_y = 0$ (cioè se il taglio T è una forza infinitamente piccola e lontana, ossia una coppia — torcente —) come si ha nel caso della pura torsione, si ritrova:

$$\text{div.}\,\overline{\tau}_z = 0 \quad ; \qquad \text{rot.}\,\overline{\tau}_z = \text{costante.}$$

Richiamiamo ora le espressioni degli spostamenti e delle componenti di tensione.

Per il caso della torsione pura M_z coincide col momento della coppia torcente, che indicheremo con M_t.

---

[1]) Roberto Marcolongo, *Teoria matematica dello equilibrio dei corpi elastici*, (Hoepli, Milano, 1904). — Gustavo Colonnetti, *Principi di statica dei solidi elastici*, (Spoerri, Pisa 1916) § 79 e seg.ti, flessione composta. — Carlo Luigi Ricci, *Lezioni di meccanica applicata alle costruzioni*. (Pironti, Napoli 1923), Vol. I° Cap. VI° n. 54 e seg.ti.

In questo stesso caso si ha notoriamente: componenti di spostamento:

$$\left.\begin{aligned} u &= -q\frac{M_t}{GI_p}z(y+a_1) \\ v &= \quad q\frac{M_t}{GI_p}z(x-b_1) \\ w &= \quad q\frac{M_t}{GI_p}[a_1x+b_1y-\Psi_{1\,(xy)}] \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

componenti di tensione:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_z &= 0 \\ \tau_{yz} &= -q\frac{M_t}{I_p}\left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial y}-x\right) \\ \tau_{zx} &= -q\frac{M_t}{I_p}\left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial x}+y\right) \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

ove:

Ψ_1 è una funzione delle coordinate x ed y, armonica $(\Delta_2\Psi_1=0)$ in tutta la sezione, e soddisfacente sul contorno della sezione alla condizione:

$$\frac{d\Psi_1}{dn}=x\frac{dy}{dn}-y\frac{dx}{dn} \qquad (5)$$

essendo poi:

$$(\Psi_1)_{x=y=0}=0 \quad ; \quad \left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial x}\right)_{x=y=0}=a_1 \quad ; \quad \left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial y}\right)_{x=y=0}=b_1$$

ed infine:

$$q=\frac{I_p}{I_p-\int\left(x\frac{\partial\Psi_1}{\partial y}-y\frac{\partial\Psi_1}{\partial x}\right)dA}$$

intendendo l'integrale esteso a tutta l'area della sezione.

Dalle (4), secondo la (2) si trova, per la pura torsione:

$$\text{rot}\,\vec{\tau}_z=q\frac{M_t}{I_p}$$

e resta così calcolata la costante C, che la (2) lasciava indeterminata.

Nei già citati trattati di teoria tecnica dell'elasticità si consi-

dera come caso della *flessione composta* la distribuzione di spostamenti e di tensioni rappresentata dalle relazioni seguenti:
componenti di spostamento:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{T_y}{EI_x}\left[\frac{xy}{m}(l-z) + a_1 z\right] \\ v &= \frac{T_y}{EI_x}\left[\left(z^2 - \frac{x^2-y^2}{m}\right)\frac{l}{2} - \left(\frac{z^2}{6} - \frac{x^2-y^2}{2m} - b_2\right)z\right] \\ w &= \frac{T_y}{EI_x}\left[\frac{yz^2}{2} - yx^2 - lyz + \Psi_{2\,(xy)} - a_2 x - b_2 y\right] \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

componenti di tensione:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{T_y}{I_x}(z-l) \\ \tau_{yz} &= \frac{m}{2(m+1)} \cdot \frac{T_y}{I_x}\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial y} - \frac{2m-1}{2m}x^2 - \frac{1}{2m}y^2\right) \\ \tau_{zx} &= \frac{m}{2(m+1)} \cdot \frac{T_y}{I_x}\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} - \frac{2m+1}{m}xy\right) \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

ove Ψ_2 è una funzione delle coordinate x ed y, che in tutta la sezione è armonica ($\Delta_2 \Psi_2 = 0$) ed al contorno della sezione soddisfa alla condizione:

$$\frac{d\Psi_2}{dn} = \frac{2m+1}{m}xy\frac{dx}{dn} + \left(\frac{2m-1}{2m}x^2 + \frac{1}{2m}y^2\right)\frac{dy}{dn} \quad (8)$$

essendo poi, nel baricentro della sezione;

$$(\Psi_2)_{x=y=0} = 0 \quad ; \quad a_2 = \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x}\right)_{x=y=0} ; \quad b_2 = \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial y}\right)_{x=y=0}$$

Dalle (7), secondo la (2) si trova per questo caso:

$$\text{rot } \bar{\tau}_2 = \frac{T_y}{2(m+1)I_x}x \quad (9)$$

e risulta quindi nulla la costante C, che nella (2) restava da determinare.

II. *Validità in generale dei risultati relativi alla* « FLESSIONE COMPOSTA ».

Occorre notare che nei trattati sopra citati per determinare coefficienti costanti delle parentesi nelle (6) e (7) si suole fare l'ipo-

tesi che gli assi x ed y siano gli assi principali d'inerzia della sezione, limitando così la validità delle (6) e (7) ad un caso particolare.

I valori sopra scritti dei detti coefficenti, che in questa adalisi in un primo tempo si devono lasciare indeterminati, vengono poi giustificati e precisati in base ai concetti qui seguìti, secondo la (9); ne consegue che *le espressioni* (6) e (7) *sono valide in generale* purchè l'asse sia baricentrico per la sezione *(anche se esso non è asse principale d'inerzia).*

Questa osservazione costituisce la prima delle precisazioni che formano l'oggetto del presente lavoro.

III. *Analisi cinematica della deformazione.*

Facciamo ora dalla teoria dell'elasticità un altro richiamo, che ci sarà immediatamente utile.

Dai sopra detti trattati sono anche noti i risultati della discussione dell'analisi della deformazione rappresentata, per i due casi, dalle (3) e (6).

E precisamente nel caso delle (3), mentre la terza di esse ci rappresenta l'ingobbimento della sezione trasversale, le prime due ci dimostrano che la sezione generica ingobbita ruota intorno ad un asse parallelo a z, definito da $x = b$ ed $y = -a$ detto *asse di torsione,* di un angolo proporzionale alla z, in modo che le rette inizialmente parallele a z si dispongono secondo eliche di uguale passo, su cilindri circolari aventi per asse l'asse di torsione. (È pure noto che questo asse incontra una sezione generica nel così detto *centro di torsione*).

Nel caso invece delle (6), la terza di esse ci rappresenta ancora un ingobbimento della sezione generica, mentre dalle prime due di esse si deduce che le rette inizialmente parallele all'asse z si dispongono secondo parabole cubiche contenute in piani paralleli all'asse y; l'inclinazione di detti piani rispetto all'asse z è dovuta alle deformazioni della sezione parallelamente al suo piano primitivo per effetto del fenomeno di Poisson, in relazione con la σ_z espressa dalla prima delle (6).

Quindi la deformazione rappresentata dalle (6) *ha nel suo complesso i caratteri di una flessione.*

IV. *Considerazioni energetiche, relative al* LAVORO MUTUO.

Notiamo ora che nei sopra detti trattati si espone l'espressione di M_z, per il caso della *flessione composta* esprimendo il momento rispetto all'asse z delle forze tangenziali elementari $\overline{\tau}_z \, dA$ conforme alla seconda e terza delle (7): l'espressione che se ne ricava si presenta rela-

tivamente complessa, di calcolo algebrico e numerico piuttosto laborioso, e nella sua forma generale, per un contorno qualunque, con la funzione Ψ_2 non ancora esplicitamente determinata, non si presta a semplificazioni, sicchè non riesce agevole l'effettivo, numerico calcolo di M_z e la conseguente determinazione del braccio di leva di T rispetto al baricentro della sezione e quindi quella della retta d'azione di T, risultante delle azioni tangenziali elementari dedotte secondo le (7).

A questa determinazione si può giungere direttamente con un ragionamento sintetico, che qui ora esponiamo, come un altro dei punti caratteristici di questo lavoro.

Poichè la deformazione rappresentata dalle (6) ha i *caratteri di una flessione*, siamo condotti a ritenere che per tale deformazione una coppia torcente M_t agente sul cilindro compia un lavoro (virtuale o mutuo) [1]) complessivamente nullo.

Per verificare questo fatto direttamente occorrerebbe calcolare punto per punto il lavoro elementare dovuto alle tensioni $\overline{\tau}_z$ date dalla seconda e terza delle (4) per gli scorrimenti $\overline{\tau}_z : G$ conformi alle seconde e terze delle (6) e quindi integrare a tutta l'area della sezione. Anche questo integrale nella sua forma generale, per la sua complicazione, ed in mancanza di esplicita espressioni delle funzioni Ψ_1 e Ψ_2, non si presta ad un calcolo agevole che ci conduca alla desiderata verifica.

Dobbiamo perciò ricorrere ad una verifica sintetica complessiva che consideri il lavoro compiuto dalla coppia torcente M_t applicata alla base estrema libera del cilindro come ad un sistema rigido, prescindendo dalla effettiva distribuzione delle tensioni tangenziali eventualmente dovute al dato M_t, e prescindendo pure dalla ripartizione degli scorrimenti dovuti alle tensioni rappresentate dalla seconda e terza delle (7).

A tal fine prendiamo in esame le (6) e calcoliamo la componente r secondo l'asse z della *rotazione* (o del *vorticale*) dello spostamento rappresentato dalle stesse relazioni.

Com'è ben noto si ha:

$$2r = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} =$$

$$= \frac{T_y}{EI_x}\left[-\frac{xl}{m} + \frac{xz}{m} - \frac{x}{m}(l-z)\right] =$$

$$= -2\frac{T_y}{mEI_x}(l-z)\,x$$

[1]) Per la denominazione di *lavoro mutuo* cfr. Carlo Luigi Ricci, opera citata nella nota [1]), Vol. I°, Cap. V°, n. 37, ove tale denominazione fu per la prima volta introdotta.

ossia:

$$r = -\frac{T_y}{mEI_x}(l-z)x$$

Se ne deduce che in una sezione qualunque, (per $z > l$) il valor medio della r calcolato per tutta la sezione è uguale a zero, in quanto è proporzionale all' $\int_A x\,d\,A$, che è nullo, poichè l'asse y si è supposto baricentrico.

Ne consegue che *la sezione trasversale generica nel suo complesso non ruota intorno all'asse z*, in quanto è nullo il valor medio della rotazione r nei varî suoi punti.

Ma, ciò che più conta ai fini della nostra ricerca, per la base si ha $z = l$, *la rotazione r dello spostamento* ora calcolata *è nulla in tutti i punti.*

Ciò prova che la base libera $z = l$, dopo ingobbita secondo la terza delle (6), ruota rigidamente intorno ad un asse normale a z, per effetto della flessione, e non subisce deformazioni parallele al proprio piano primitivo: quest' ultimo fatto è fisicamente spiegato in quanto per $z = l$ è pure nulla la σ_z data dalla prima delle (7) e quindi sono nulle la dilatazione assiale $\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$ e quelle trasversali $\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\frac{\varepsilon_z}{m}$ dovute al fenomeno di Poisson.

Ciò è pure confermato dal fatto, che la r è proporzionale ad $(l-z)$ come la σ_z.

Per maggiore chiarezza notiamo poi che l' ingobbimento della sezione estrema non può far compiere lavoro alle azioni tangenziali *esterne.*

Concludendo, il *lavoro mutuo dei due sistemi di tensioni (e di deformazioni) rappresentati dalle* (3) e (4) *e rispettivamente dalle* (6) e (7) *è rigorosamente nullo.*

Se ne deduce che il taglio T risultante delle forze tangenziali elementari dovuti alle tensioni espresse dalle seconda e terza delle (7) *(flessione composta) deve essere incidente all'asse di torsione sopra definito.*

Perciò lo stato di tensione rappresentato dalle (6) e (7) si potrebbe denominare come *flessione composta pura* (cioè *priva di torsione*) od anche più brevemente come *taglio puro,* ovvero *taglio semplice* (intendendo che gli aggettivi *puro e semplice* significano privo di torsione, ma *non privo di flessione*).

Se ne conclude che il taglio T incidente all'asse di torsione ed il momento M_t preso rispetto allo stesso asse di torsione, considerati come *parametri* del sistema delle forze esterne applicate alla base estrema libera del cilindro, risultano *elasticamente* o *energeti-*

camente indipendenti, in quanto *uno qualsiasi di essi non genera lavoro per effetto della deformazione prodotta dall'altro.*

V. *Flessione composta compléta. Sovrapposizione degli effetti.*

Il caso generale della flessione composta, che potremo denominare flessione composta completa, si presenta quando la sollecitazione esterna applicata sulla base libera del cilindro è una forza T contenuta nel piano della base stessa, ed avente per retta d'azione una retta generica di questo stesso piano.

In tal caso i due parametri sopra specificati sono:

— il taglio semplice costituito dalla forza T trasportata parallelamente a se stessa, nello stesso piano della base libera, fino ad essere incidente all'asse di torsione.

— il momento torcente M_t pari al momento della forza nella primitiva posizione, *preso rispetto all'asse di torsione.*

Si possono poi calcolare le deformazioni e le tensioni dovute a questi due parametri, e precisamente, quelle dovute al momento torcente M_t secondo le (3) e (4) e quelle dovute al taglio semplice T, secondo le (6) e (7).

Le caratteristiche dello stato di tensione complessivo si otterranno sovrapponendo gli effetti, cioè sommando algebricamente le componenti omologhe sì di spostamento che di tensione dovute rispettivamente alle due sollecitazioni parziali sopradescritte.

La *sovrapposizione degli effetti* è pienamente giustificata per i motivi seguenti:

— le condizioni (1) e (2) soddisfatte, come s'è visto, per i due stati di tensione parziali, saranno pure soddisfatte per le tensioni risultanti, in quanto *gli operatori div* e *rot* sono notoriamente *lineari.*

— poichè le $\overline{\tau}_z$ dovute ai due stati di tensione parziali, al contorno della sezione riescono tangenti al contorno [in virtù delle (5) e delle (8) rispettivamente), la tensione risultante riuscirà pure tangente al contorno, come deve essere, secondo ch'è ben noto.

E queste condizioni notoriamente le sole determinatrici, della distribuzione di $\overline{\tau}_z$ nello stato di tensione caratterizzato dalla presenza delle sole tensioni σ_z e $\overline{\tau}_z$.

Poichè i due parametri sopra descritti sono *elasticamente* od *energeticamente indipendenti,* il lavoro di deformazione complessivo è semplicemente la somma dei lavori di deformazione parziali dovuti a ciascuno dei due parametri (poichè è zero il lavoro mutuo). Questo risultato è assai utile per le feconde applicazioni dei noti teoremi sul lavoro di deformazione.

Il calcolo statico della *flessione composta completa* nella forma

generica deve quindi essere sempre preceduto dalla ricerca delle funzioni Ψ_1 e Ψ_2; dalla Ψ_1 si ricavano nel modo noto il centro e l'asse di torsione.

Il calcolo può essere facilitato dai modelli con laminette flessibili, secondo le analogie di PRANDTL (per la torsione, con agevole determinazione del relativo centro) e di GRIFFITH e TAYLOR (per il taglio semplice) [1]).

A questo lavoro ne dovrà seguire un altro con la discussione dei risultati della sovrapposizione degli effetti sopra specificata, in relazione con la variazione del braccio di leva $M_t : T$; la discussione dovrà avere di mira le condizioni di stabilità, nonchè la distribuzione e configurazione delle trajettorie delle τ_z.

VI. *Riepilogo.*

L'autore di queste pagine si permette di richiamare l'attenzione degli studiosi e dei tecnici sui punti salienti del presente lavoro:

— applicabilità delle (6) e (7) *in generale* anche se l'asse x *non* è principale d'inerzia;

— posizione del taglio risultante nel caso delle (7) (*flessione composta pura* o *taglio semplice*);

— verifica del fatto che sulla base estrema del cilindro la rotazione r delle u e v è nulla in tutti i punti;

— determinazione di *parametri elasticamente* (od *energeticamente*) *indipendenti* per la *flessione composta completa*;

— conseguente sovrapposizione degli effetti per il calcolo dello stato di tensione complessivo.

Con ciò l'autore spera di aver portato all'importante argomento della flessione composta un contributo non trascurabile, il quale possa essere utile per l'applicazione della teoria a casi concreti e per aprire la via a ricerche ulteriori.

---

[1]) Per queste analogie cfr.: FÖPPL. *Drang und zwang.* (Oldenbourg. Munchen und Berlin), II Band, § 67, pag. 80-91. — GRIFFITH e TAYLOR. *The problem of flexure and its solution by the soap film metod.* Reports and Memoranda n. 399. Tecnical Report of the Advisory Committee for Aeronautics for 1917, pag. 950. — Giuseppe ALBENGA, *Estensione dell' analogia di Prandtl.* Annali dei Lavori Pubblici, agosto 1927-V.° Roma,

Le algebre del 4.° ordine

Memoria del socio ordinario **Gaetano Scorza**

(presentata nell' adunanza del dì 6 aprile 1935 - XIII
per essere inserita nel volume XX degli Atti)

Sunto. — Oggetto delle indagini raccolte in questa memoria è la determinazione di tutti i possibili tipi di algebre del 4.° ordine, senza imporre alla ricerca alcuna ipotesi restrittiva.

Avanzi di ippopotamo nell' Italia meridionale

Memoria dei soci ordinari **Giuseppe De Lorenzo** *e* **Geremia D' Erasmo**

(presentata nell' adunanza del dì 6 aprile 1935 - XIII
per essere inserita nel volume XX degli Atti)

Sunto. — In base all' esame dei principali avanzi di ippopotamo rinvenuti nei depositi quaternari dell' Italia meridionale continentale (valle del Liri, bacino del Mèrcure, valle di Venosa, penisola salentina, isola di Capri), gli Autori dimostrano che tali resti rientrano tutti nelle dimensioni comunemente raggiunte dal vivente *Hippopotamus amphibius* e che non si può in conseguenza ritenere fondata l' esistenza, nel Pleistocene di queste regioni, di altre specie distinte per la loro maggiore o minore statura.

Affinità, trasformazioni cremoniane e gruppi automorfi delle algebre complesse del 3.° ordine dotate di modulo

Memoria della dott. **Carmela Carbonara**

(presentata nell'adunanza del dì 6 aprile 1935 - XIII
per essere inserita nel volume XX degli Atti)

Sunto. — Il Prof. Spampinato ha collegato ad ogni algebra complessa dotata di modulo due gruppi notevoli, costituiti l'uno di affinità, l' altro di trasformazioni cremoniane.

Qui per ciascuna delle cinque algebre complesse del 3.° ordine dotata di modulo si determinano e i detti due gruppi e i relativi gruppi automorfi.

Osservazioni Meteorologiche raccolte nell'anno 1934 nell'Istituto di Fisica terrestre della R. Università di Napoli

($\varphi = 40°58',8$ N ; $\lambda = 14°50',6$ E ; $h = 43^m,4$)

Nota del socio corrispondente **Giov. Battista Rizzo**

(Adunanza del dì 2 febbraio 1935 - XIII)

Sunto. — Dalle osservazioni eseguite durante l'anno 1934 si ottengono i seguenti risultati medii annuali:

Pressione atmosferica	mm.	761,7;
Temperatura media		17,7;
» media delle minime		13,9;
» media delle mass.		21,9.
Umidità assoluta	mm.	9,9;
» relativa	%	61.
Vento: direzione predominante		S;
velocità		7,1;

Nebulosità: 4,1; pioggia mm. 881,1; giorni piovosi 108.
Eliofania totale: ore 2280,8.

Nelle tabelle in cui sono riassunti i risultati delle osservazioni la pressione atmosferica, ridotta a 0° e al livello del mare, è espressa in millimetri di mercurio.

La temperatura è espressa in gradi centigradi e la temperatura media è calcolata colla formola:

$$T_m = \frac{1}{2}(T_{mass.} + T_{min} + T_8 + T_{19}).$$

L'umidità assoluta è espressa in millimetri, quella relativa in centesimi della saturazione.

La velocità del vento è indicata in Km/ora, e lo stato del cielo in decimi di cielo coperto. L'eliofania è la durata effettiva dello splendere del sole in ore e decimi.

L'altezza delle precipitazioni è espressa in millimetri.

Le notazioni *p*, *n*, *neve*, *g*, *temp* indicano rispettivamente la forma delle precipitazioni: pioggia, neve, nevischio, grandine, pioggia che accompagna un temporale.

Gennaio

Giorno	Pressione a 0° e al mare	Temperatura			Umidità		Vento		Stato del cielo	Eliofania : ore	Precipitazioni	
		media	minima	massima	assoluta	relativa	direzione	velocità			mm	forma
1	756.7	9.9	7.0	13.2	6.9	73	N	13.7	10.7	0.6	—	—
2	757.9	9.4	7.4	12.6	6.0	66	N	8.7	7.7	2 5	2 7	p
3	758.2	9.8	6.4	14.4	6.2	66	N	3.3	6.3	5,5	—	—
4	762.0	9.1	6.9	12.3	6.3	71	N	3.0	6.0	2.0	—	—
5	765.6	8.8	6.0	11.2	6.8	76	N	3.0	4.0	3.6	—	—
6	767.2	8.5	5.5	12.6	5.4	63	S	6 7	5.0	5.1	—	—
7	768.3	8.2	7.4	9.5	4.2	51	N	7.3	6.0	3.0	—	—
8	766.7	7.4	5.8	10.2	3.7	47	ENE	13.0	2.0	7.0	—	—
9	767.2	7.1	4.2	11.0	4,1	52	N	10.7	0.0	7.1	—	—
10	769.1	7.6	4.8	12.4	3.9	50	N	9.0	0.0	7.4	—	—
11	769.6	7.5	4.9	11.9	4.1	52	N	4.3	0.0	7.8	—	—
12	767.6	8.5	5.0	12.8	5.4	62	W	4,7	7.3	6 0	0.3	p.
13	756.9	10.2	5.2	13.6	8.6	84	W	7.0	10.0	0.0	24.6	p.
14	761.7	8.9	6.5	13.0	5.8	70	N	6.7	5 3	6.1	—	—
15	763.8	10.0	6.1	13.8	7.6	78	SSE	12.7	10 0	2 0	3.1	p.
16	760.5	11.0	7.9	14 4	5.8	56	W	11.0	8.0	4.9	3.8	p.e ne
17	766.2	8.5	6.8	11.0	4.2	49	N	6.3	5.7	6.8	—	—
18	768.4	7.9	4.2	13.0	3.6	43	N	3.7	0.0	8.2	—	—
19	766 6	9.2	5.1	12 9	7 5	80	N	3.7	10.0	0.0	—	—
20	765.1	11.9	7.4	15.0	8.8	79	SSE	10.7	6.3	3.2	—	—
21	769.7	12.5	10.0	17.2	7.0	65	N	7.3	5.7	5.0	—	—
22	771 9	11.0	9.2	14.6	6.0	61	N	11.7	4,7	4.8	—	—
23	769.0	10.6	8.8	14.0	4 6	48	N	15 0	4.3	6.5	—	—
24	768.6	10.3	8,1	13.4	4.7	49	ENE	14.7	4.0	4.4	—	—
25	773.7	11.0	9.2	14.0	4.4	41	N	13.0	3.7	5 8	—	—
26	775.1	10.0	8.1	14.0	4.7	51	N	7.3	4.7	6,8	—	—
27	772.0	8.8	4.6	14.4	5.3	60	N	4.3	0.0	7.4	—	—
28	762.7	9.7	6.0	14.8	7.3	81	S	3.7	10.0	2,0	14.2	p.
29	758.5	8.3	6.4	12.7	4.9	62	N	8.3	5,7	5.6	1.5	p.
30	761.0	5.7	4.6	7.6	5.2	77	N	8.3	9.3	0.6	10.8	tem
31	762.5	6.1	3.1	10.1	4.2	58	N	3.7	4.3	7.0	0.8	p.
Media	765.5	9.1	6.4	12.8	5.6	62	N	7.9	5 4	144.7 (totale)	61.8 (totale)	

Febbraio

	Pressione a 0° e al mare	Temperatura			Umidità		Vento		Stato del cielo	Eliofania ore	Precipitazioni	
		media	minima	massima	assoluta	relativa	direzione	velocità			mm	forma
1	755.7	5.8	3.6	9.0	4.2	59	E	9.0	8.7	1.6	5.1	temp,
2	753.5	6.3	3.2	9.8	5.5	74	ENE	11.3	10.0	0.0	20.9	temp.
3	756.8	7.8	5.1	12.0	5.8	72	N	9.3	5.3	3.4	10.9	p.
4	751.9	11.3	5.0	15.6	6.7	59	NNE	22.7	8.0	3.0	3.5	p.
5	751.2	10.1	8.0	12.0	6.5	69	N	13.7	10.0	0.0	1.7	p.
6	758.2	8.9	7.0	11.8	4.6	53	N	21.0	3.0	4.4	—	—
7	762.4	9.5	5.8	14.4	3.7	39	N	7.3	0.0	8.3	—	—
8	765.1	10.2	5.9	16 0	6.3	62	N	3.7	0.0	8.0	—	—
9	768.4	10.7	6.9	16 2	5.2	53	W	11.0	0.0	8.3	—	—
0	775.0	9.5	5.3	15.0	3.5	36	N	5.3	0.0	8.1	—	—
1	773.3	9.7	6.4	14.8	6.3	68	N	3.0	1.0	7.2	—	—
2	770.5	10.0	5.6	15.4	7.2	74	S	5.7	2.0	8.0	—	—
3	771.7	6.8	4.4	9.8	2.7	35	ENE	27.0	1.7	8.4	—	—
4	774.9	4.2	1.8	8.0	1.5	24	ENE	23.0	0.0	8.8	—	—
5	769.6	7.5	3.0	12.8	3.0	36	N	7.0	1.0	8.3	—	—
6	767.3	6.9	6.0	9.4	3.5	47	E	14.3	6.3	4.4	gocce	p.
7	770 6	7.4	4 0	11.0	3.4	42	ENE	13.0	2.0	7.3	—	—
8	769.7	8.9	6.0	13.0	5.0	57	N	4.3	5.3	4.0	—	—
9	769.7	9.4	6.6	13.4	4.1	46	ENE	11.0	0.0	8.0	—	—
0	768.1	10.3	7.0	14.2	6.9	71	WSW	2.0	5.7	3.8	—	—
1	767.2	10.7	7.2	15.4	6.9	69	N	3.7	6.3	6.4	—	—
2	772.8	11.1	6.0	16.8	7.1	67	N	2.3	0.0	7.8	—	—
3	773.5	11.0	7 2	15.8	7.8	76	W	4.7	5.3	8.6	—	—
4	770.5	12.1	7.8	17.5	6.0	55	N	3.7	2.0	8.2	—	—
5	766.6	11.6	7.4	15.9	5.4	50	S	4.3	5.0	1.2	—	—
6	763.3	13.8	10.9	16.0	8.3	68	SSE	14.7	8.0	3.3	—	—
7	757.0	15.0	12:0	18.6	8.3	64	SSE	23.0	8.0	1.8	—	—
8	749.2	14.6	12.0	17.4	6.9	55	W	16.7	10.0	0.0	—	—
Medio	765 1	9 7	6.3	13.8	5.4	56	N	10.6	4.1	150.6 (totale)	42.1 (totale)	

Marzo

Giorno	Pressione a 0° e al mare	Temperatura			Umidità		Vento		Stato del cielo	Eliofania: ore	Precipitazioni	
		media	minima	massima	assoluta	relativa	direzione	velocità			mm	forma
1	746.6	11.1	9.6	14.0	7.8	79	SSE	15.0	9.3	5.0	18.9	p.
2	758.7	9.9	7.1	12.7	6.0	64	S	6.0	5.7	5.2	10.7	p.
3	761.1	8.9	5.9	12.6	5.0	58	N	5.7	10.0	2.3	—	—
4	754.0	10.1	7.0	14.8	5.4	55	N	6.0	9.7	0.0	—	—
5	752.6	10.9	8.6	14.6	5.6	56	NNE	14.0	8.7	4.4	—	—
6	758.2	11.3	8.0	14.4	4.7	45	ENE	8.7	9.3	0.0	—	—
7	761.5	10.9	7.4	14.0	5 1	50	W	6.7	8.0	7.8	0.1	p.
8	760.3	13.4	10.2	17.0	9.6	81	SSE	9.0	10.0	2.0	—	—
9	761.6	14.1	11.0	17.4	9.2	75	SSE	11.0	6.0	6.2	—	—
10	760.9	14.3	12.1	18.0	9.8	79	SSE	9.3	6.3	6.5	0.9	p.
11	758.6	13.7	11.0	16.9	8.3	70	W	4.7	9.3	1.4	—	—
12	757.4	13.2	10.3	16.1	9.5	82	SSE	12.0	7.0	2.8	—	—
13	757.1	15.3	12.0	18.8	7.8	58	SSE	16.0	6.7	6.8	—	—
14	754.9	16.9	14.2	19.6	7.2	48	SSE	27.0	9.0	1.0	—	—
15	754.0	12.8	11.6	14.4	7.9	70	W	4.7	8.7	0.3	0.5	p.
16	749.7	10.8	9.2	12.6	7.3	78	WSW	16.0	10.0	0.0	16.1	temp
17	755.7	11.7	7.9	15.8	7.4	69	WSW	15 7	7.3	5 9	5.5	p.
18	754.5	12.5	10.4	16.0	9.1	81	SSE	13.3	9.7	2.3	5.3	temp
19	760.9	11.1	8.6	14.9	6.6	67	W	10.7	9.3	4.0	8.1	temp
20	764.0	14.0	9.9	17.8	7.5	60	S	10.0	1.0	8.0	—	p.
21	763.3	15.5	11.6	20.0	7.3	54	S	7.3	7.7	3.6	—	—
22	761.4	14.7	11.9	19.2	9.2	73	S	3.7	9.3	4.4	—	—
23	756.9	15.0	12.8	17.4	6.5	51	N	8.0	8.0	0.0	—	—
24	759.2	14.9	12.0	18.4	8.8	67	SSE	6.3	7.7	4.0	—	—
25	760.5	15.7	11.6	20.8	5.8	43	N	4.7	6 0	1.2	—	—
26	756.6	16.0	13.0	20.9	6.2	46	N	15 7	10.0	0.3	0.6	p.
27	755.1	14.4	13.0	17.0	8.7	71	N	5.0	9.3	0.0	1.1	p.
28	756.3	14.8	12.1	19.0	8.8	70	E	4.3	8.3	1.4	—	—
29	751.3	13.5	12.4	15.2	9.6	84	S	3.7	10.0	0.0	3.9	p.
30	751.4	14.6	11.3	19.2	9.8	77	SSE	4.7	9.3	6.2	11.2	temp
31	753.4	13.4	11.8	16.6	9.0	80	N	7.0	10.0	3.5	2.7	p.
Media	757.0	13.2	10.5	17.0	7.6	66	SSE	9.4	8 3	96.5 (totale)	85.6 (totale)	

Aprile

Giorno	Pressione a 0° e al mare	Temperatura			Umidità		Vento		Stato del cielo	Eliofania: ore	Precipitazioni	
		media	minima	massima	assoluta	relativa	direzione	velocità			mm	forma
1	754.9	13.3	11.2	17.8	8.4	74	N	4.0	9.7	0.0	5.2	p.
2	755.2	13.9	12.0	18.4	9.0	77	N	6.3	6.3	3.2	—	—
3	756.4	13.8	11.1	17.2	5.1	43	N	16.3	6.7	5.8	—	—
4	757.3	12.9	8.1	18 0	6.0	50	S	6.3	5 7	7.5	9.0	temp.
5	755.8	13.7	10.0	18 4	9.1	75	W	7.3	9.3	4.4	36.6	p.
6	755 3	13.8	10.5	17.6	9.2	75	S	7.0	7.7	6.3	4.0	p.
7	757.1	14.7	10.8	19.0	9.2	73	SW	8.0	8.0	5.8	5.8	p.
8	755.9	17.5	11.0	24.0	6.7	42	N	5.0	6.3	1.2	—	—
9	757.0	14.7	11.3	19.6	9.5	74	SSE	11.7	8.7	4.2	2.5	p.
10	761.4	14.7	11.9	18.0	8.1	64	S	5.7	4.7	7.5	—	—
11	761.1	15.7	10.9	20.6	10.0	70	S	6.0	1.7	9.2	—	—
12	761.8	17.8	11.2	24.0	6.9	42	N	7.0	3.7	5.7	—	—
13	762.1	18.8	15.4	22.8	9.6	59	E	5.0	6.3	3.0	gocce	p.
14	765.6	17.8	13.0	23.8	9.8	61	N	5.3	6.3	5.4	2.4	p.
15	767.2	18.9	13.0	25.4	12.1	70	SE	7.3	3.0	9.2	—	—
16	766.9	18.6	14.0	23.0	12.6	74	S	3.3	6.0	6.5	—	—
17	765.0	17.4	14.1	21.4	12.4	79	S	5.3	7.0	5.5	—	—
18	764.2	17.3	14.6	21.6	11.2	75	SSE	4.0	7.3	3.1	—	—
19	764.9	18 4	13.8	23.6	11.0	67	N	5.7	6.7	7.6	—	—
20	764.6	19.8	13.2	26.0	10 3	55	E	5.3	1.0	8.9	—	—
21	762 9	20.6	14.0	26.6	10.4	53	ESE	6.0	1.0	6.0	—	—
22	757.9	20 4	16.0	25.6	10.7	59	S	11.7	6.7	1.7	gocce	p.
23	760.3	17 9	14.4	21.6	9.7	61	S	9.0	5.3	9 5	—	—
24	754.8	18.8	12.8	22.8	6.2	35	N	4.0	6.7	3.6	1.1	p.
25	751.1	18 4	15.8	21.7	12.5	77	N	6.0	10 0	0.0	11.6	p.
26	754.1	17.0	14.3	20.0	9.2	65	SSE	12.3	10 0	0.2	5 0	p.
27	762.0	16.6	12.8	20.6	10.7	73	SSE	5.7	6.0	5.5	—	—
28	763.1	18.8	12.4	23.6	9.7	55	E	6 3	1.0	7.2	—	—
29	761.4	19.6	13.0	25.2	11.9	64	SE	5.3	2.0	9.7	—	—
30	758.9	21.3	14.3	26.9	10.0	49	N	8.0	5.3	8.9	—	—
Media	759.9	17.1	12.7	21.8	9.6	63	N,S	6.9	5,9	162.3 (totale)	83.2 (totale)	

Maggio

Giorno	Pressione a 0° e al mare	Temperatura			Umidità		Vento		Stato del cielo	Eliofania ore	Precipitazioni	
		media	minima	massima	assoluta	relativa	direzione	velocità			mm.	forma
1	759.1	21.9	17.2	27.8	7.9	38	S	5.3	2.0	10.8	—	—
2	753.6	22.9	16.1	29.6	7.8	35	E	6.3	4.7	5.2	—	—
3	753.6	19.4	17.3	22.8	12.1	73	SSW	14 0	7.7	2.0	2.0	p
4	757.0	17.8	14.4	21.9	11.3	72	SSE	10.0	6.0	8 4	10 9	p
5	759.0	18.3	13.9	22.5	11.0	66	SSE	7.3	6.0	9.2	—	—
6	759.8	18,0	13.9	23.0	11.4	73	SE	7.7	7.3	3.1	6.8	p
7	762.2	18.8	14.9	25.0	12.3	73	SE	4.7	6 3	5.0	1.8	temp
8	763.8	18.6	13.4	24.4	11.6	71	S	5 0	6.3	4 0	3.6	temp
9	764.8	18.8	15.0	24 4	11.6	72	N	7.0	9.3	3.2	3.9	p
10	764.6	21.0	15.0	25.8	7.5	37	E	10.3	5.0	8.3	gocce	p
11	763.5	20.4	17.2	25.0	10.6	60	N	4.3	9.3	4.1	3.0	p
12	761.8	18.8	14.6	23.4	12.5	78	E	6,0	8.7	4.3	5.7	p
13	761.8	19.1	14.0	23.6	13.2	77	E	6.7	3.7	4.0	0.3	p
14	760.5	17.7	14.4	22.0	12.0	81	S	7.7	8 3	4.7	16.6	temp
15	757.6	19.2	14.2	23.7	13.1	72	SSW	6.0	4.7	10.1	—	—
16	754.2	20.8	15.4	25.4	9.8	50	E	4.3	8.3	3.1	—	—
17	749.0	20.5	17.4	25 2	12 4	71	S	9.0	8.7	5.2	19.7	temp
18	758.7	19.0	15.9	22.6	12.3	72	W	9.3	4 7	9.8	9.7	p
19	764.2	20.3	15.1	25.0	10.5	55	S	6.7	1.3	11.5	—	—
20	764.7	20.4	15.0	25.6	12.8	66	N	6.0	6.3	2.4	—	—
21	764.8	21.2	17.1	25.8	12.1	63	N	5.0	5.7	4.3	—	—
22	765.0	23.4	17.0	28.6	7.9	33	ENE	11.0	2 3	12.3	—	—
23	763.3	24.6	18.9	29.4	8.9	36	N	8.3	2.0	12.2	—	—
24	761.2	23.0	18.2	27.4	12.1	55	S	10 7	3.7	9.1	—	—
25	762.2	22.6	17.9	26.4	15.8	73	S	4.3	3.0	9.6	—	—
26	762.4	24.4	17.9	28.0	12.3	54	S	5.0	1.0	12.6	—	—
27	761.0	23.1	17.2	27.7	10.9	47	SSE	6.3	3 3	10.0	—	—
28	761.2	21.7	18.6	26.2	7.3	36	N	17 3	7.7	6.2	—	—
29	761.9	21.1	14.8	26.4	7.7	38	ENE	10.7	0.0	12.5	—	—
30	764.4	23 0	17.4	27 6	8.1	36	E	4.7	1.0	12.0	—	—
31	765.1	22.9	18.0	26.9	12.7	57	SSE	7.7	3.0	12.5	—	—
Media	760.8	20.7	16.0	25.5	11.0	59	S	7.6	5.1	231.7 (totale)	84.0 (totale)	

Giugno

Giorno	Pressione a 0° e al mare	Temperatura			Umidità		Vento		Stato del cielo	Eliofania: ore	Precipitazioni	
		media	minima	massima	assoluta	relativa	direzione	velocità			mm.	forma
1	766.4	22.4	17.6	26.5	11.5	55	SSE	4.7	8.0	5.0	0.9	p.
2	766.5	23.3	18.2	28.0	14.2	63	S	5.7	6.3	12.0	—	—
3	760.7	24.1	13.0	29.6	11.7	47	S	9.3	5.0	8.3	—	—
4	758.1	22.8	19 0	26.1	15.8	74	S	8.3	7.7	4.8	—	—
5	756.0	23.3	19.2	26.8	14.0	63	S	6.3	8.3	0.9	0.7	p.
6	760.9	23.4	20.4	27.2	16.3	77	S	10.3	5.7	8.3	—	—
7	761.8	24.9	20.0	29.6	11.0	44	WNW	5.0	4.3	12.4	0.1	—
8	762.6	25.8	23.2	29.2	12.7	51	WNW	7.7	5.3	11.5	—	—
9	762.2	25.3	23.9	29.0	13.8	59	S	7.0	5.7	9.0	—	—
10	759.8	24 0	19.6	29.2	10.2	45	S	0.3	4.7	10.0	0.3	p.
11	758.5	23.1	18.2	26.9	12.4	55	SSW	7.7	4.0	11.1	—	—
12	757.9	23.2	19.1	26.8	14.6	67	SSE	9.7	6.0	9.0	0.1	p.
13	756.8	18.4	15.0	21.7	13.1	87	N	9.7	10.0	2.7	67.6	temp.
14	758.8	21.4	14.9	27.4	9.1	44	N	8.3	4.0	12.3	—	—
15	758.9	23.1	17.7	27.8	8.9	40	W	5.7	2.7	10.1	—	—
16	760.7	22.2	19.4	27.4	9.9	49	E	9.0	8.7	8.0	0.3	p.
17	764.1	22.0	17.0	28.2	10.7	52	N	6.3	5,3	8.2	3.1	temp.
18	764.8	23.3	18.4	27.6	10.3	45	W	6.7	3.7	12.6	0.5	p.
19	763.4	24.0	18.4	28.4	10.1	57	N	5.0	1.0	12.5	—	—
20	758.9	23.7	20.1	27.4	15.3	68	S	14.7	7.3	7.7	—	—
21	754.0	23.7	21.2	28.0	12.8	58	S	11.7	5 0	12.6	gocce	p.
22	762.6	24.1	22.1	27.2	8.3	37	W	8.3	0.0	13.2	—	—
23	763.6	25.0	18 7	30.4	7.9	31	WNW	5.3	0.0	13.3	—	—
24	763.7	25.0	19.5	29.4	12.9	51	E	6.7	1.0	11.6	—	—
25	764 0	25.2	19.1	30.4	13.0	50	S	5.3	0 0	12.7	—	—
26	763.7	26.0	19.1	30.9	10.2	37	S	6.0	0.0	13.2	—	—
27	760.9	25.0	19.6	29.8	13.0	52	W	5.0	1.0	12.0	—	—
28	758.2	24.8	20.0	28.6	14.5	58	S	6.7	1.3	11.0	—	—
29	755.9	23.8	20.5	27.8	12.7	56	S	7.7	6.3	8.3	—	—
30	758.0	19.7	17.0	26.0	12 3	73	S	6.0	7.7	9.0	30.3	temp.
Media	760.7	23.5	19.1	28.0	12.1	55	S	7.5	4.5	293.3 (totale)	103.9 (totale)	

Luglio

Giorno	Pressione a 0° e al mare	Temperatura			Umidità		Vento		Stato del cielo	Eliofania: ore	Precipitazioni	
		media	minima	massima	assoluta	relativa	direzione	velocità			mm.	forma
1	758.7	20.9	15.6	25.6	10.6	54	W	5.3	4.3	12.0	8.4	p.
2	761.6	24.4	18.1	30.5	11.0	46	W	7.3	2.0	11.2	—	—
3	761.0	26.0	19.9	31.8	9.2	34	N	5.7	0.0	12.2	—	—
4	759.2	25.0	20.8	28.4	16.7	68	S	8.3	3.0	11.3	—	—
5	760.6	25.8	21.1	31.0	15.3	59	W	4.3	3.0	12.3	—	—
6	762.1	25.8	21.0	31.0	16.3	64	S	6.0	4.3	8.3	—	—
7	763.4	26.8	21.6	32.0	14 2	51	S	9.0	1.0	12.3	—	—
8	762.9	27.3	21.0	32.6	13.3	45	E	5.0	0.0	12.5	—	—
9	762.4	28.0	22.5	33.5	8.5	28	S	6.0	0.0	12.5	—	—
10	762.4	27.6	22.0	33.0	14.8	49	W	5.0	0.0	12.3	.	—
11	761.8	27.5	22.2	32.8	18.7	66	SSE	9.7	1.0	12.5	—	—
12	759.2	27.4	22.2	32.0	17.6	62	SSW	10,3	0.0	13.2	—	—
13	758.3	29.0	22.4	34.6	11.4	36	WSW	10.0	0.0	11.6	—	—
14	758.7	27.7	23.4	31.4	16.5	57	S	7.7	6.0	12.1	gocce	p.
15	760.4	26.7	22.5	30.2	14.6	52	S	12.7	2.3	12.0	—	—
16	759.4	24.1	21.3	29.2	12.6	57	N	8.3	4.0	8.4	0.9	p.
17	761.0	25.0	19.0	29.8	10.1	39	N	7.7	3.0	12.5	—	—
18	759.2	27.1	21.0	32.0	9.8	34	S	5.3	0.0	12.1	—	—
19	758.3	26.5	20.9	31.2	11.9	43	SSE	4.0	0.0	12.3	—	—
20	759.5	26.7	21.8	31.0	17 3	62	S	4.0	0.0	12.3	—	—
21	760 1	27.2	22.0	33.0	12.8	46	W	6.3	0.0	12.0	—	—
22	760.0	29.8	22.8	35.4	10.5	31	S	5.7	0.0	11.5	—	—
23	759.9	28.1	23.8	32.6	14.9	51	SE	7.7	4.0	11.3	—	—
24	762.9	26.9	22.4	31.6	12.1	45	W	5.0	0.0	12.3	—	—
25	761.6	26.4	22.0	30.9	16.6	62	S	7.7	6.7	10.5	5.9	tem
26	759.6	23.9	18.8	28.8	10.4	45	N	12.3	1.7	12.0	3.0	p.
27	761.2	25.6	20.0	30.4	9.8	38	N	7 7	0.0	12.2	—	—
28	760.3	26.6	21.0	31,0	13.2	47	S	6.3	1.7	12.5	—	—
29	761.1	25.7	21.0	31.6	13.9	54	E	9.0	1.0	12.4	—	—
30	761.1	26,5	21.6	32.0	14.4	53	E	5.3	1.0	12.3	—	—
31	760.2	27.4	21.6	33.0	15.8	55	S	6.7	0.0	12.1	—	—
Media	760.6	26.4	21.2	31.4	13.4	50	S	7,1	1.7	367.0 (totale)	18.2 (totale)	

Agosto

Giorno	Pressione a 0° e al mare	Temperatura			Umidità		Vento		Stato del cielo	Eliofania: ore	Precipitazioni	
		media	minima	massima	assoluta	relativa	direzione	velocità			mm.	forma
1	758.4	26.6	22 0	31.0	16.1	58	S	6,3	4,7	8.4	—	—
2	758 9	26.7	22.5	31.0	18.6	68	E	8.7	5.0	10.5	—	—
3	758.9	26.3	22.0	30.4	16.6	63	E	6.7	3.3	11.5	—	—
4	757.9	26.8	22.0	32.0	15.2	54	SE	8.7	1.0	9.0	—	—
5	760.9	25.7	22.8	29.4	12.0	48	N	4.3	0.0	11.2	—	—
1	760.5	25.3	20.2	31.0	12 2	48	S	5.3	1.0	11.5	—	—
7	758.0	25.1	20.0	29.4	15.6	61	E	7.0	0.0	10 4	—	—
8	758.3	25.9	21 0	30.6	18 3	69	S	6.3	4.7	7.0	—	—
9	759.3	24.8	21.4	29.0	14.8	61	S	4.7	6.0	6.3	0.5	p.
10	762.0	25 7	20.0	30.8	13 7	52	S	7.0	2.7	9.0	—	—
11	761.8	24.9	22.6	27.4	15.7	66	N	7.7	7.0	3.5	0.4	p.
12	761.6	25.2	20.0	31.0	16.5	65	S	7.0	1 0	11.2	—	—
13	760.6	25.0	22.0	29.0	13.9	57	S	7.0	3.3	11.0	—	—
14	756.8	24.9	20.2	29.4	14.6	60	S	10.7	6 3	6.0	1.2	p.
15	756.7	23.6	19 2	26.0	12.3	53	N	13.3	3.0	10.2	—	—
16	763.8	22.9	17.6	28 2	9.1	41	N	5.3	1.0	11.5	—	—
17	765.7	24.3	18.9	29.6	11.2	45	N	3.7	0.0	11.5	—	—
18	763.5	25.4	19.9	30.2	9.4	36	N	5.3	1.7	10.5	—	—
19	763.5	26.0	19.0	31.8	11 7	42	SE	9.0	3.7	10.5	—	—
20	763.3	25.5	19.9	30.0	16.3	62	E	4.0	0.0	11.0	—	—
21	762.5	26.4	20.4	32.2	12.8	46	E	3.3	3.0	10.0	—	—
22	762.3	26.1	22.1	30.2	14.4	54	W	4.7	7.7	2.4	0 2	p.
23	762.0	25.0	22.0	30.0	17.4	73	S	5.7	5.0	11.0	9.2	p.
24	761.3	26.0	21.4	30 4	17.6	67	E	6.7	4.7	10.4	—	—
25	760.0	27.1	21.8	33.0	18.6	66	E	6.7	0.0	10.3	—	—
26	757.3	26.4	22.0	31.4	17.4	65	E	8 3	4.7	5.4	4.7	temp.
27	757.4	24.0	21.1	26 9	15.3	73	E	5.3	6.0	5.3	5.1	p.
28	758.8	22.9	17.8	28.4	12.6	58	N	4.7	0.0	11.0	—	—
29	760.3	24.2	19.2	28.6	15.3	63	S	6.7	2.3	10.3	—	—
30	761.8	24.7	20.8	29 1	15.9	65	W	4.3	2.0	11.2	—	—
31	758.9	24.8	20.2	30.0	16.1	66	E	7.3	3,0	10.5	—	—
Media	760.4	25.3	20.7	29.9	14.8	58	S	6.5	3.0	289.5 (totale)	21,3 (totale)	

Settembre

Giorno	Pressione a 0° e al mare	Temperatura			Umidità		Vento		Stato del cielo	Eliofania ore	Precipitazioni	
		media	minima	massima	assoluta	relativa	direzione	velocità			mm	forma
1	756.6	22.8	20.5	25.5	10.9	51	SW	8.7	5.7	5.2	—	—
2	752.5	19.8	16.5	24.6	11.9	69	W	29.7	7.7	6.8	5.8	p.
3	760.2	21.1	16.0	25.8	9.8	51	W	6.3	2.7	5.7	—	—
4	763.6	21.7	16.2	28.0	9.4	45	N	5.3	2.7	9.1	—	—
5	765.1	22.7	17.5	29.0	10.4	47	E	4.7	0.0	9.5	—	—
6	765.6	24.1	18.5	28.4	12.2	49	S	5.0	0.0	8.0	—	—
7	765.2	24.3	19.5	29.0	11.9	49	S	4.3	0.0	7.0	—	—
8	763.4	23.1	18.0	28 2	16.4	71	S	4.3	0.7	8.2	—	—
9	762.5	23.6	19.8	27 5	17.1	73	E	6.0	4.7	6.2	—	—
10	761.8	23.2	19 8	28.0	15.9	72	S	7.3	5.0	6.8	—	—
11	761.7	22.9	19.8	26 0	14.8	71	S	5.7	6.7	1.7	—	—
12	762.7	22.8	18.4	27.5	14.2	64	S	4.3	3.0	4.8	—	—
13	763.6	23.3	19.0	27.9	14.1	62	S	5.3	3.0	6.5	—	—
14	764.0	22.1	19.0	26.8	16.2	78	N	6.0	7.0	3.6	10.5	p
15	763.5	22.6	18.0	27.8	13.8	64	N	6.0	5.0	4.8	—	—
16	764.1	22.8	18.4	29.2	13.5	63	N	5.3	4.3	5.6	—	—
17	764 1	23.4	19.9	28.6	13.4	61	N	5.0	5.0	6.6	—	—
18	766.1	23.9	90.2	29.5	12.6	55	E	6.3	2.7	8.0	—	—
19	763.3	23.4	19.0	27.5	14.7	64	S	4.0	3.0	7.2	—	—
20	761.1	22.0	19.0	24.7	15.0	77	N	5.3	8.7	0.3	73.9	tem
21	759.8	19.9	18.4	22.0	14.4	84	N	5.0	9.0	0.0	23 9	p.
22	761.1	21.7	17.9	25.4	14.9	74	S	5.3	2.7	7.0	0.5	p.
23	762.2	21.7	18 2	25.9	14.9	73	E	5.7	3.7	6.8	—	—
24	763.3	22.1	18.0	27.0	13.9	67	E	4.3	4.3	6.3	—	—
25	764.9	21.8	18.4	26.7	13.5	67	E	4.7	5.3	6.3	—	—
26	766.7	21.7	18.0	26.2	14.6	71	N	5.0	3.3	5.7	—	—
27	768.9	22.6	18:2	27.9	13.6	64	N	3.0	3.0	6.0	—	—
28	768.6	23.1	18.8	29.4	9.4	42	E	4.7	2.0	7.6	—	—
29	768.0	22.6	17.9	28.0	10.4	49	S	3.7	0.0	7.8	—	—
30	767.3	22.2	17.6	27.4	10.0	47	W	3.0	2.0	7.2	—	—
Media	763.4	22 5	18.5	27.2	13.3	63	S	6.0	3.8	182.3 (totale)	114.6 (totale)	

Ottobre

Giorno	Pressione a 0° e al mare	Temperatura			Umidità		Vento		Stato del cielo	Eliofania : ore	Precipitazioni	
		media	minima	massima	assoluta	relativa	direzione	velocità			mm	forma
1	766.1	21.9	18.2	27.2	13.0	65	S	3.3	2.0	6.5	—	—
2	764.4	21.3	17.9	26.6	11.9	62	E	2.7	2 0	7,1	—	—
3	763.3	21.2	17.2	25.3	11.5	58	E	4.3	0 0	6 6	—	—
4	762.2	20.9	15.8	24.9	14.4	72	SSE	8.7	4.1	2.4	7 5	temp.
5	761.9	22.5	18.1	27.0	16.9	81	S	9.0	9.0	4.8	4.0	p.
6	764.2	21.4	18.8	25.4	11.6	60	W	3.7	4.7	6.4	31.9	p.
7	761.5	15 0	11.5	18 7	9.8	73	N	7.3	10.0	0.4	13.5	p.
8	759.3	16.3	13.8	18.6	10.6	74	N	9.0	9.0	0.9	10.1	p.
9	759.3	17.6	13 8	22.4	10,3	67	N	4.0	6.3	3.3	0.2	p.
10	760.1	19.1	15.8	23.0	11.2	66	N	4.0	8.3	4.2	12,2	temp.
11	761.0	18.3	15.8	21.8	9 8	62	NNE	16.0	6.7	2.7	0.1	p.
12	766.5	18.1	15.1	21.9	6.8	42	N	17,3	0.0	7.7	—	—
13	767.2	17.9	13.5	23.6	7.5	47	W	3.7	4.0	7.2	—	—
14	764.2	18.0	14.0	22.8	11.0	68	SW	4.7	2.0	6.4	—	—
15	757.2	19.0	16.4	22.2	11.9	70	W	7.3	7.3	1.0	gocce	p.
16	754.4	19 6	17.6	22.4	11.0	64	W	4 7	6.7	3.0	—	—
17	757.4	15.7	14.2	18.8	8.8	66	NW	5.0	8.7	1.0	—	—
18	760.1	14.9	12.0	19.0	7.3	57	WNW	10.0	6.0	4.1	6.0	p.
19	765 8	12.8	9.0	17 8	2.9	32	N	5.0	0.0	7.7	0.1	p.
20	763.0	13.0	8.4	17.6	4.8	40	N	12.7	9.0	1.4	—	—
21	761.4	13.0	11.0	16.2	8.4	73	N	9.0	10.0	0.0	1.3	p.
22	760,8	14.2	12.1	16.8	8.8	72	N	9.3	8.7	0.0	—	—
23	762.3	17.1	13.2	22.8	8 7	58	N	7 0	1,0	8.3	—	—
24	766.0	17.0	12.9	23.0	10.4	70	W	2.3	2.7	8.6	—	—
25	767·1	16.8	13.2	22.0	11.2	76	W	3.0	2.3	7 8	—	—
26	767.1	17.0	12.8	22.0	11.3	74	W	4 0	0.0	8,4	—	—
27	767.0	16.9	13.0	22.0	10.4	70	W	3.7	1.0	8.4	—	—
28	766.2	16.4	13.4	21.4	10.9	75	W	3.7	7.0	5,8	—	—
29	764.1	16.7	14.1	20 6	11.2	78	W	3.3	5.7	3.7	gocce	p.
30	762.6	17.3	15.0	20.4	11.6	77	W	2.3	8,0	2.2	—	—
31	760.7	17.3	13.7	22.0	11.3	75	W	3.7	4.7	6.4	—	—
Media	762.7	17.6	14.2	21.8	10.2	65	W	6.3	5.1	144.4 (totale)	86.9 (totale)	

Novembre

Giorno	Pressione a 0° e al mare	Temperatura			Umidità		Vento		Stato del cielo	Eliofania: ore	Precipitazioni	
		media	minima	massima	assoluta	relativa	direzione	velocità			mm	forma
1	760.0	17.2	15.0	21.0	10.9	72	S	7.0	4.3	5.6	12.6	p.
2	764.4	15.3	12.2	19.6	7.7	58	S	1.0	5.0	5.7	—	—
3	766.2	15.8	12.1	20.6	8.7	63	N	6.3	6.3	3.1	—	—
4	765.3	17.6	13.4	19.4	12.8	81	S	18.3	10.0	0.0	4.7	p.
5	763.5	18.0	16.0	21.0	13.0	84	S	7.0	9.3	0.0	6.6	p.
6	759.3	18.9	16.7	21.4	13.4	79	SSE	16.0	8.0	3.6	7.1	p.
7	758.9	18.3	16.4	21.6	10.6	68	S	5.0	7.3	7.2	0.7	p.
8	758.8	14.8	13.5	17.9	7.8	63	W	7.0	8.3	3.0	19.2	temp
9	762.5	14.7	12.8	17.5	8.1	67	N	5.0	4.7	6.0	—	—
10	761.5	15.5	11.6	19.6	9.3	63	W	3.3	4.7	5.0	0.5	p.
11	757.6	17.6	14.5	19.7	12.5	75	S	15.7	6.7	0.2	0.8	p.
12	752.2	14.9	13.8	16.0	11.1	87	NW	3.7	10.0	0.0	40.0	p.
13	755.5	14.6	12.0	17.6	7.7	61	W	8.7	5.3	6.4	7.7	p.
14	758.6	14.8	13.2	17.8	9.6	77	W	9.7	10.0	0.0	2.9	p.
15	759.9	15.0	11.0	19.0	11.3	84	S	6.7	10.0	1.0	0.4	p.
16	759.8	18.4	13.5	22.5	10.0	59	W	6.0	8.0	0.0	—	—
17	762.3	17.5	15.6	20.6	11.6	76	W	3.3	4.7	7.0	—	—
18	763.5	15.9	13.2	19.4	9.7	69	W	3.0	6.3	6.0	—	—
19	765.0	14.6	12.3	17.4	9.9	74	W	3.3	5.7	0.4	—	—
20	763.4	13.7	11.2	16.0	7.5	62	N	8.0	9.7	0.2	1.1	p.
21	759.1	13.0	11.6	15.0	7.7	68	N	11.3	9.0	1.0	14.3	p.
22	762.3	11.4	9.4	13.5	5.3	52	N	18.7	6.0	2.8	—	—
23	765.8	10.7	9.0	13.5	4.7	49	N	12.0	4.3	4.5	—	—
24	768.0	11.1	9.1	14.8	4.9	48	N	11.7	0.7	7.8	—	—
25	769.4	10.8	8.8	14.6	4.9	50	N	11.7	1.0	6.5	—	—
26	763.5	10.2	5.4	14.4	4.5	45	N	15.7	1.3	8.0	—	—
27	769.0	12.6	10.0	17.0	5.9	53	N	12.0	0.7	7.5	—	—
28	770.5	14.1	11.0	17.3	6.5	51	N	9.0	3.3	6.0	—	—
29	771.9	13.6	9.9	16.8	7.6	62	W	4.0	4.0	4.0	—	—
30	769.9	11.8	3.2	16.5	7.2	71	W	4.3	1.0	6.0	—	—
Media	762.9	14.7	12.1	18.0	9.4	66	N	8.5	5.9	114.5 (totale)	118.6 (totale)	

Dicembre

Giorno	Pressione a 0° e al mare	Temperatura			Umidità		Vento		Stato del cielo	Eliofania: ore	Precipitazioni	
		media	minima	massima	assoluta	relativa	direzione	velocità			mm	forma
1	769.5	12.8	9.2	17.4	7.4	63	W	3.7	1.3	7.2	—	—
2	770.4	11.8	8 5	16.0	7.5	70	W	4.0	6.7	5.8	—	—
3	767.3	13.1	9.6	16.6	8.8	74	W	5.3	8 7	2.0	—	—
4	765.2	14.9	11.0	19.0	10.6	79	W	4.0	7.7	3.5	—	—
5	762.4	15.0	13.0	17.5	11.1	85	SW	6.0	8.3	0.6	—	—
6	766.8	14.1	11.2	19.6	9.1	74	W	3 7	3.0	7.4	—	—
7	768.4	13 8	11.2	17.0	10.0	82	W	4.7	9.7	2.2	—	—
8	766.4	14.0	11.2	17.8	9.1	74	W	4.0	6.3	6.0	—	—
9	767.3	13.7	10.2	19.0	8,4	70	W	3.0	5.0	6.0	—	—
10	762.8	13.7	11.0	16.8	10.1	83	W	5.0	9.7	0.3	—	—
11	757.4	13.2	10.6	16.0	9.1	82	S	12.3	10.0	0.0	20.1	p.
12	757.4	12.5	10.0	15.8	9.2	81	S	5,0	9.7	2.5	1.7	p.
13	757.0	14.7	11.0	17.0	10.1	78	SSE	17.3	10.0	0.0	0.2	p.
14	752.6	12.9	11.4	15.0	9.3	84	W	11.7	10.0	0.6	30.4	p.
15	753.3	12.8	10.5	16.5	8.7	78	S	8.3	8.7	3.2	1.3	p.
16	747.9	13.7	11.0	16.0	8.6	72	WSW	12.0	9.0	1.7	7.1	p.
17	749.5	11.8	9.0	16.0	7.3	69	W	6.0	5.0	6.2	0.1	p.
18	754.3	12.0	9.5	15.9	5 9	55	NNW	9.0	3.7	7.4	—	—
19	753.5	11.5	8.6	15 4	7.7	76	W	3.7	10.0	0.0	—	—
20	754.1	11.4	9.6	13.8	7.0	70	NW	7.3	9.3	0.0	—	—
21	755.3	11.7	10.0	13.9	6.7	64	W	6.3	9.3	0.0	—	—
22	757.0	10.4	7.0	16.0	6.0	62	W	3.0	3.3	7.4	—	—
23	758.1	10.8	8.0	15.4	6.5	66	W	3 0	6,0	4.7	—	—
24	760.5	10.0	7,2	14.0	6.2	66	W	3.7	1.7	4.3	—	—
25	760.2	10.6	8.0	14.4	6.0	61	N	13.3	5.0	1 6	—	—
26	764.1	10.7	8.0	14.8	6.3	64	W	5.3	1.0	7,4	—	—
27	761.9	10.2	7.6	13.6	6.4	68	W	5.7	9.3	1.0	—	—
28	766.0	11.2	8 6	15.2	6.1	60	W	6.3	5.0	7,0	—	—
29	765.3	10.1	6.8	14.5	6.4	66	W	3.7	8.3	0.2	—	—
30	764.1	10.6	7.5	12.8	5.8	58	N	12.0	9,3	0.0	—	—
31	767.8	10.8	9.0	14.5	4.8	49	N	7.7	0.0	7.8	—	—
Media	760.8	12.3	9.5	15.9	7.8	70	W	6.8	6 8	104.0 (totale)	60.9 (totale)	

Riassunto annuale

Mesi	Pressiene a 0° e al mare	Temperatura			Umidità		Vento		Stato del cielo	Eliofania assoluta ore	Precipitazioni mm	Totale giorni piovosi
		media	minima	massima	assoluta	relativa	direzione	velocità				
Gennaio	765.5	9.1	6.4	12.8	5.6	62	N	7.9	5.4	144.7	61.8	9
Febbraio	765.1	9.7	6.3	13.8	5.4	56	N	10.6	4.1	150.6	42.1	5
Marzo	757.0	13.2	10.5	17.0	7.6	66	SSE	9.4	8.3	96.5	85.6	14
Aprile	759.9	17.1	12.7	21.8	9.6	63	N,S	6.9	5.9	162.3	83.2	10
Maggio.	760.8	20.7	16.0	25.5	11.0	59	S	7.6	5.1	231.7	84.0	12
Giugno.	760.7	23.5	19.1	28.0	12.1	55	S	7.5	4.5	293.3	103.9	10
Luglio	760.6	26.4	21.2	31.4	13.4	50	S	7.1	1.7	367.0	18.2	4
Agosto	760.4	25.3	20.7	29.9	14.8	58	S	6.5	3.0	289.5	21.3	7
Settembre. . . .	763.4	22.5	18.5	27.2	13.3	63	S	6.0	3.8	182.3	114.6	5
Ottobre.	762.7	17.6	14.2	21.8	10.2	65	W	6.3	5.1	144.4	86.9	11
Novembre. . . .	762.9	14.7	12.1	18.0	9.4	66	N	8.5	5.9	114 5	118.6	14
Dicembre	760.8	12.3	9 5	15.9	7.8	70	W	6.8	6.8	104.0	60.9	7
Anno	761.7	17.7	13.9	21.9	9.9	61	S	7.6	4.1	2280.8 (totale)	881.1 (totale)	108

SOCIETÀ REALE DI NAPOLI

Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche

Programma di concorso al premio accademico pel biennio 1935-36

La R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche della Società Reale di Napoli conferirà un premio di Lire Mille all'autore della migliore memoria sul tema:

Studio dello spazio funzionale relativo ai polinomi definiti di un dato grado.

CONDIZIONI

1. Le memorie dovranno essere scritte in italiano, latino o francese ed essere inviate al Segretario dell'Accademia nella sede di questa (R. Università, via Mezzocannone, 8) non più tardi delle ore 12 del 31 maggio 1936.

2. Ciascuna memoria non porterà il nome dell'autore, ma sarà distinta con un motto, il quale dovrà essere ripetuto sopra una busta suggellata, che conterrà la scheda recante il nome dell'autore.

3. Le buste della memoria premiata e di quelle che avranno ottenuto l'*accessit* saranno aperte dal Presidente nell'adunanza generale, che avrà luogo nel gennaio 1937.

4. La memoria premiata potrà essere pubblicata negli Atti dell'Accademia, nel qual caso l'autore ne avrà cinquanta copie.

5. Tutte le memorie inviate pel concorso si conserveranno nell'Archivio dell'Accademia, e soltanto per quelle che avranno meritato il premio o l'*accessit* si permetterà ai rispettivi autori di estrarne copia.

Napoli, 9 marzo 1935 - XIII.

Il R. Commissario

G. Salvi

SOCIETÀ REALE DI NAPOLI

Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche

Programma di concorso al premio SEMENTINI pel biennio 1935-1936.

La Classe delle Scienze fisiche e matematiche della Società Reale di Napoli e la Facoltà di Scienze della R. Università di Napoli, in base al Legato contenuto nel testamento del Prof. LUIGI SEMENTINI in data del 6 aprile 1847 e alla Convenzione addizionale cogli Eredi Sementini in data del 2 dicembre 1920, bandiscono un concorso per premiare uno o due autori di memorie manoscritte, o anche stampate dopo il 15 giugno 1934, di *Chimica applicata.*

A tal fine destinano la somma di *Lire Mille,* che potrà essere assegnata o tutta all'autore di una memoria che sia giudicata di merito distinto, e notevolmente preminente rispetto a quelle dei restanti candidati, se vi saranno, oppure potrà essere divisa *in due premii di Lire Cinquecento* ognuno, da assegnarsi a due differenti autori di memorie, che siano giudicate meritevoli, e le migliori in confronto di quelle degli altri eventuali concorrenti.

Le domande con le relative memorie dovranno essere presentate alla Segreteria della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche (sita nella R. Università di Napoli — Via Mezzocannone, 8) non più tardi delle ore 12 del dì 16 giugno 1936.

Tutte le memorie inviate al Concorso si conserveranno nell'Archivio dell'Accademia.

Napoli, 6 febbraio 1935 - XIII.

Il R. Commissario
GIUNIO SALVI

SOCIETÀ REALE DI NAPOLI

Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche

Programma di concorso ai premi
GABRIELE e RUGGIERO TORELLI

L' Accademia delle Scienze fisiche e matematiche della Società Reale di Napoli, incaricata dalla Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Università di Napoli di amministrare la fondazione del premio quinquennale Gabriele e Ruggiero Torelli, proroga il termine del 2.° concorso e bandisce il 3.° concorso per premiare giovani cultori di Matematica pura ed incoraggiarli alla ricerca scientifica.

Al 2.° concorso possono essere ammessi i laureati in Matematica pura in qualunque Università italiana nel quinquennio dal 1.° gennaio 1930 fino al 31 dicembre 1934.

Ogni concorrente dovrà far pervenire all' Accademia nella sede di questa (R. Università di Napoli, via Mezzocannone, 8) non più tardi delle ore 12 meridiane del 31 dicembre 1935 i certificati della sua carriera scolastica e dell' esame di laurea insieme a tutte quelle note e memorie che egli avrà già pubblicate eventualmente prima e dopo la laurea, e a una domanda contenente il recapito, e l' elenco dei titoli inviati.

Al 3.° concorso saranno ammessi i laureati in Matematica pura in qualunque Università italiana nel quinquennio dal 1.° gennaio 1935 al 31 dicembre 1939 che ne facciano domanda. Il termine per la presentazione delle domande di ammissione a questo 3.° concorso con le stesse modalità sopra indicate è alle ore 12 meridiane del dì 2 gennaio 1940.

La somma disponibile per premi in ognuno dei due concorsi è di Lire Mille.

Il giudizio dell' Accademia sarà pubblicato nel Rendiconto.

Napoli, 9 febbraio 1935 - XIII.

Il R. Commissario
G. Salvi

SOCIETÀ REALE DI NAPOLI

Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche

Programma di concorso al premio
AGOSTINO OGLIALORO TODARO

La R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche della Società Reale di Napoli, incaricata, dal Comitato per le onoranze al compianto Prof. Agostino Oglialoro Todaro, di amministrare la fondazione intitolata col nome del detto Professore, bandisce il 4° concorso per premiare giovani cultori di Chimica pura, ed incoraggiarli nella ricerca scientifica, giusta lo Statuto pubblicato a pagina 65 nel volume XXXI della serie 3ª del proprio Rendiconto.

Al concorso sono ammessi i laureati in Chimica pura nella R. Università di Napoli durante il triennio dal 1° gennaio 1935 al 31 dicembre 1937, che ne facciano domanda.

Ogni concorrente dovrà far pervenire all'Accademia nella sede di questa (R. Università di Napoli, via Mezzocannone, 8) non più delle ore 12 meridiane del 4 gennaio 1938, insieme ai certificati della sua carriera scolastica, e dell'esame di laurea sostenuto, tutti gli altri suoi titoli scientifici nel campo della Chimica pura. Nella domanda dovranno essere contenuti il recapito del concorrente, e l'elenco dei titoli inviati.

La somma disponibile è di Lire Mille, e l'Accademia si riserva o di attribuirla tutta a un giovane che essa giudicherà di merito distinto e notevolmente preminente rispetto agli altri candidati, o di dividerla in due premi, di cui stabilirà il valore secondo i meriti dei due candidati che riterrà migliori.

Il giudizio dell'Accademia sarà pubblicato nel volume del Rendiconto dell'anno della scadenza del concorso.

Napoli, 9 febbraio 1935 - XIII.

Il R. Commissario
G. Salvi

Processo verbale dell'adunanza del dì 5 gennaio 1935 - XIII.

All'adunanza, presieduta dal socio De Lorenzo, assistono i soci ordinari residenti Bakunin, Bottazzi, del Pezzo, Diamare, Longo, Marcolongo, Masoni, Pascal E., Pierantoni (ff. segretario), ed i soci corrispondenti Andreoli, Colamonico, Ricci, Rizzo.

Letto ed approvato il processo verbale della seduta dell' 8 dicembre 1934, il presidente comunica i ringraziamenti del socio Scorza per le condoglianze dell' Accademia.

Il segretario partecipa che vi sono due domande di concorrenti al premio Oglialoro, inviate dai dottori De Gennaro Giovanni ed Argentino Antonio.

Il socio Andreoli presenta pel Rendiconto una nota « *Sulle metriche Cayleyane delle V_2 ed una terza geometria non euclidea* ».

Il socio Marcolongo dà notizia sulle recenti pubblicazioni della Reale Commissione Vinciana. Essendo stata assunta dalla tipografia dello Stato la stampa dei manoscritti e dei disegni di Leonardo, la detta Commissione ha potuto finalmente pubblicare gli altri codicetti Forster conservati nel Victoria a. Albert Museum di London, e precisamente (il 1° essendo stato edito nel 1930) il secondo — assai voluminoso e perciò diviso in due parti — ed il terzo, dei quali mostra una copia, facenti parte della collezione minore dei manoscritti vinciani.

È in preparazione il fascicoletto contenente la descrizione e la storia dei codicetti e il loro completo indice.

Colla stampa dei fogli che si conservano alla Biblioteca Reale di Windsor (eccettuati i celeberrimi quaderni di anatomia già resi noti da una pubblicazione di studiosi norvegesi) , cui già attende la Reale Commissione vinciana, sarà entro il 1936 esaurita la stampa di tutto ciò che rimane conosciuto ed inedito di Leonardo.

Il Marcolongo coglie questa occasione per informare l' Accademia che la notizia apparsa nei giornali italiani ed esteri nello scorso agosto, della scoperta nella Biblioteca di Irkuskusk di un nuovo manoscritto vinciano, non corrisponde al vero. Si tratta, da notizie pervenute alla Reale Commissione vinciana pel tramite del Ministero degli Esteri, del volume contenente il codice sul volo degli uccelli edito dal Piumati e dal Sabachnikoff e ancora mancante dei foglietti posteriormente ritrovati e pubblicati da M. Carusi.

Il Marcolongo mostra all'Accademia il terzo dei superbi fascicoli dei disegni pubblicati dal Venturi dal primo periodo milanese di Leonardo al 1489. La prefazione accuratissima del Venturi contiene

la storia e la riproduzione del quadro « *La vergine delle Roccie* ». Dà infine notizia di due pubblicazioni straniere, riguardanti la prima la vita e l'ambiente letterario ed artistico in cui visse Leonardo: *Leonardo the Florentine* di Rachel Annard Taylor, New York, 1927; la seconda i disegni; precisamente: *Studien zu Leonardo da Vinci* von Kikuo Kosima, Erster Teil, mit 100 Tafeln. Tokio, 1934.

Processo verbale dell'adunanza del dì 12 gennaio 1935-XIII.

Presenti i soci ordinari residenti Bakunin, De Lorenzo, del Pezzo, D'Erasmo, Diamare, Giordani, Longo, Marcolongo, Masoni, Pascal Ernesto, Pierantoni, Quagliariello, Scorza, Signorini ed i soci corrispondenti Andreoli, Carrelli, Colosi, Nobile e Rizzo.

Funziona da presidente S. E. Giordani e da segretario d'Erasmo.

Il segretario dà lettura del processo verbale della tornata 5 gennaio, che viene approvato. Indi comunica, con profondo dolore, che alle ore 23 del 5 corrente cessava di vivere in Napoli il socio Antonio della Valle, professore emerito di Anatomia comparata, il quale appartenendo da 37 anni all'Accademia, aveva dato a questa, in qualità di socio, di segretario, di presidente, contributi molteplici della propria attività e della propria dottrina.

Il socio corrispondente Colosi legge una commossa commemorazione dello scomparso, la quale verrà pubblicata nel Rendiconto insieme col ritratto e con l'elenco delle pubblicazioni; e il Presidente, dopo aver incaricato il segretario di rinnovare alla famiglia Della Valle le condoglianze dell'Accademia, toglie la seduta in segno di lutto.

Processo verbale dell'adunanza del dì 2 febbraio 1935-XIII.

Partecipano all'adunanza, presieduta da S. E. Giordani, i soci ordinari Bakunin, Bottazzi, De Lorenzo, del Pezzo, d'Erasmo (segretario), Diamare, Marcolongo, Masoni, Pascal Ernesto, Pierantoni, Quagliariello, Scorza, Signorini e i soci corrispondenti Andreoli, Caccioppoli, Carnera, Carrelli, Ricci e Rizzo.

Il segretario legge il processo verbale della tornata 12 gennaio, che è approvato. Indi il Presidente comunica con profondo dolore la morte, avvenuta in Palermo il 18 dello scorso mese, del sen. Emanuele Paternò, che da ben 30 anni apparteneva alla Sezione delle Scienze naturali in qualità di socio ordinario non residente, e ne ricorda brevemente gli insigni meriti di uomo e di scienziato. L'Accademia, che non ha mancato di esprimere le proprie condoglianze

alla famiglia, si riserba di commemorare degnamente l'illustre scomparso in altra adunanza.

Il socio corrispondente Andreoli comunicando all'Accademia la nomina del Quadrumviro de Vecchi a Ministro della Educazione Nazionale, propone che col saluto al Duce l'Accademia esprima il proprio compiacimento, e domanda che questa sua proposta venga inserita nel verbale. L'Accademia, pienamente associandosi, esegue il saluto al Duce.

Indi il Segretario comunica che al concorso al premio Gabriele e Ruggero Torelli, bandito il 1° febbraio 1930 e scaduto il 2 gennaio 1935, nessun concorrente ha domandato di partecipare. Letto il regolamento di detta fondazione, l'Accademia stabilisce di prorogare il 2° concorso, relativo ai laureati in matematica pura nel quinquennio 1930-1934, fino al 31 dicembre 1935, e di bandire con le norme consuete il 3° concorso, relativo ai laureati nel quinquennio 1935-1939, fissandone la scadenza al 2 gennaio 1940.

Il socio corrispondente Andreoli presenta per il Rendiconto una sua nota dal titolo *Elementi per una geometria metrico-differenziale di una V_4 in una V_5 isotropa cayleyana.*

Il socio Pascal Ernesto presenta per la stampa una nota del Dott. A. Colucci *Sulla derivata ennesima di un Wronskiano,* proponendone l'inserzione nel Rendiconto. L'Accademia deciderà nella prossima tornata.

Il socio corrispondente Rizzo presenta, per lo stesso periodico, una sua nota dal titolo *Osservazioni meteorologiche raccolte nell'anno 1934 nell'Istituto di Fisica terrestre della R. Università di Napoli.* Dopo alcune osservazioni di vari soci, l'Accademia decide, su proposta del presidente, che la pubblicazione di tale nota nel Rendiconto avvenga indipendentemente da ogni restrizione attualmente in vigore.

Il socio corrispondente Carnera presenta una nota della dott. Maria Viaro dal titolo *Osservazioni del pianeta Saturno eseguite al R. Osservatorio di Capodimonte,* e ne riferisce, proponendone l'accoglimento nel Rendiconto. L'Accademia deciderà nella ventura adunanza.

Si procede indi alla nomina della Commissione giudicatrice del 3° concorso al premio Agostino Oglialoro-Todaro scaduto il 4 gennaio 1935, in persona dei soci Bakunin, Giordani e Quercigh.

Il presidente, annunziando l'invito fatto dal socio Diamare di presenziare alle onoranze a Giovanni Paladino, comunica che alla cerimonia dello scoprimento del busto del compianto consocio intervennero il presidente e numerosi soci e si felicita col collega Diamare per la riuscita della bella iniziativa, destinata a perpetuare il

ricordo di uno fra i più insigni maestri dell' Ateneo napoletano. Il socio Diamare ringrazia.

Processo verbale dell' adunanza del dì 9 febbraio 1935 - XIII.

All'adunanza, presieduta da S. E. Giordani, assistono i soci ordinari residenti Bakunin, De Lorenzo del Pezzo. D' Erasmo (segretario), Diamare, Marcolongo, Masoni, Pascal Ernesto, Pierantoni, Quagliariello, Scorza, Signorini ed i soci corrispondenti Andreoli, Carrelli, Gallucci, Nobile, Ricci e Rizzo.

Il segretario dà lettura del processo verbale dell'adunanza 2 febbraio, che viene approvato. Indi comunica la lettera del prof. Guido Della Valle, che ringrazia l'Accademia per la parte presa nella luttuosa circostanza della morte del genitore. Presenta quindi il fascicolo del Rendiconto relativo al 2° semestre 1934, nonchè le memorie Colucci e Scorza, inserite nel volume XX degli Atti.

Il presidente annunzia che il socio sen. Salvi, nella sua qualità di Commissario della Società Reale e di Rettore della R. Università di Napoli, ha emesso con le norme consuete il nuovo bando di concorso al premio Sementini per il biennio 1935-36, ed informa che lo stesso Commissario non ha mancato di inviare a suo tempo, a nome dell'Accademia, il saluto al Quadrumviro de Vecchi di Val Cismon, nominato Ministro dell'Educazione Nazionale.

Si vota sulle note del dott. A. Colucci *Sulla derivata ennesima di un Wronskiano*, e della dott. M. Viaro *Osservazioni del pianeta Saturno eseguite al R. Osservatorio di Capodimonte*, presentate nella precedente adunanza per l'inserzione nel Rendiconto. Entrambe risultano approvate alla unanimità.

Il Segretario legge la Relazione sui lavori compiuti dall' Accademia nel corso dell'anno 1934, da stamparsi nel Rendiconto.

La socia Bakunin, anche a nome dei colleghi Giordani e Quercigh, legge la relazione sul 3° concorso al premio Agostino Ogliaioro - Todaro, la quale conclude con la proposta che la somma disponibile di L. 1000 venga divisa egualmente in due premi da L. 500 da assegnarsi ai due concorrenti dott. Argentino Antonio e de Gennaro Giovanni. Messa ai voti tale proposta, è accolta all'unanimità dall'Accademia.

Processo verbale dell'adunanza del dì 2 marzo 1935 - XIII.

Sono presenti i soci residenti Bakunin, Bottazzi, de Lorenzo, del Pezzo, d'Erasmo, Diamare, Marcolongo, Masoni, Pascal Ernesto, Pierantoni, Quagliariello ed i soci corrispondenti Andreoli e Rizzo.

Funziona da presidente il sen. DEL PEZZO e da segretario il socio D'ERASMO.

Il segretario dà lettura del processo verbale della tornata 9 febbraio, che viene approvato. Indi comunica i ringraziamenti della famiglia PATERNÒ per le condoglianze inviate dall'Accademia e dà notizia dell'invio, disposto dal R. Commissario sen. SALVI in seguito ad un analogo invito ministeriale, di una copia delle pubblicazioni accademiche delle quali esisteva ancora disponibilità di esemplari, alla nuova Università di S. Paolo del Brasile.

Il presidente dà il benvenuto al socio straniero BUCHNER della Università di Lipsia, che assiste all'adunanza.

Il socio MARCOLONGO riferisce che la Sezione di Scienze Matematiche, riunitasi il giorno 2 marzo, ha scelto il seguente tema per il concorso accademico del biennio 1935-36: « *Studio dello spazio funzionale relativo ai polinomi definiti di un dato grado* ». L'Accademia approva la scelta e stabilisce di bandire un concorso su questo tema con scadenza al 31 maggio 1936 (XIV) e con premio di lire mille pagabili nel gennaio del 1937 (XV) sui bilanci degli anni 1935 e 1936.

Processo verbale dell'adunanza del dì 9 marzo 1935-XIII

Assistono i soci ordinari residenti BAKUNIN, DE LORENZO, DEL PEZZO, D'ERASMO, GIORDANI, LONGO, MARCOLONGO, MASONI, PASCAL Ernesto, PIERANTONI, SCORZA, ed i soci corrispondenti ANDREOLI, CACCIOPPOLI, CARRELLI, NOBILE e RIZZO.

Funziona da presidente S. E. GIORDANI e da segretario il socio D'ERASMO.

Il Segretario legge il processo verbale dell'adunanza 2 marzo, che viene approvato.

Il Presidente annunzia che con recente Decreto-Legge è stata disposta l'unificazione di alcune accademie napoletane (Accademia Pontaniana, R. Accademia delle Scienze Mediche e chirurgiche) con la Società Reale di Napoli ed è stato approvato il nuovo Statuto, e riferisce ai soci sulle principali modalità del prossimo passaggio dal vecchio al nuovo ordinamento.

Il socio SCORZA presenta, per l'inserzione negli Atti, una memoria della dott. Carmela CARBONARA dal titolo: *Affinità, trasformazioni cremoniane e gruppi automorfi delle algebre complesse del 3° ordine dotate di modulo.* Il presidente nomina la Commissione composta dai soci SCORZA, DEL PEZZO, PASCAL perchè riferisca in una prossima adunanza su questo lavoro.

Il socio corrispondente ANDREOLI presenta, per il Rendiconto, una sua nota *Sulla topologia degli* S_3 *e la polidromia di intreccio.*

Processo verbale dell'adunanza del dì 6 aprile 1935 - XIII.

All'adunanza, presieduta dal Sen. De Lorenzo, assistono i soci ordinari Bakunin, Del Pezzo, D'Erasmo (segretario), Diamare, Giordani, Longo, Marcolongo, Masoni, Pascal Ernesto, Pierantoni, Quagliariello, Scorza, Signorini ed i soci corrispondenti Caccioppoli, Carnera, Carrelli, Colosi, Gallucci, Nobile e Rizzo.

Il segretario legge il processo verbale della tornata 9 marzo, che è approvato. Indi presenta il volume della Mineralogia Vesuviana di Ferruccio Zambonini, di cui a cura dèl socio Quercigh è stata ultimata la stampa della 2.ª edizione, e comunica i ringraziamenti della vedova Zambonini, alla quale l'Accademia inviò in omaggio la prima copia.

Il socio Scorza, anche a nome dei colleghi Del Pezzo e Pascal, legge la relazione sulla memoria della dott. Carbonara dal titolo: *Affinità, trasformazione cremoniane e gruppi automorfi delle algebre complesse del 3° ordine dotate di modulo,* presentata nella precedente adunanza, proponendo che venga accolta per l'inserzione nel vol. XX degli Atti. Con votazione unanime, l'Accademia accoglie tale proposta.

Il socio De Lorenzo presenta, per gli Atti, una memoria sua e del consocio D'Erasmo sopra *Avanzi di ippopotamo nell'Italia meridionale.* Con votazione unanime (astenendosi i soli soci De Lorenzo e D'Erasmo) l'Accademia ne approva la stampa, destinando una somma non superiore alle lire mille per la esecuzione delle relative figure.

Il socio Scorza presenta per gli Atti una sua memoria dal titolo *Le algebre del 4° ordine.* L'Accademia ne delibera l'inserzione alla unanimità.

Il socio corrispondente Gallucci presenta, per il Rendiconto, una sua nota *Su le curve razionali piane d'ordine n.*

Il socio D'Erasmo presenta una nota, inviata in Segreteria dal socio corrispondente Andreoli e destinata al Rendiconto, *Sugli indici di diffusione nei fenomeni statistici di ricambio sociale.*

Il socio Marcolongo offre in omaggio all'Accademia un suo opuscolo dal titolo *Arte e scienza di Leonardo da Vinci.* Il Presidente, a nome dell'Accademia, ringrazia.

Processo verbale dell'adunanza del dì 13 aprile 1935 - XIII.

Sono presenti i soci ordinari Bakunin, De Lorenzo, Del Pezzo, Diamare, Longo, Marcolongo, Masoni, Pascal Ernesto, Pierantoni, Scorza, Signorini ed i soci corrispondenti Caccioppoli, Carnera, Carrelli, Colamonico, Colosi, Nobile, Ricci e Rizzi.

Funziona da presidente il Sen. De Lorenzo e da Segretario il socio D'Erasmo.

Il segretario dà lettura del processo verbale dell'adunanza 6 aprile, che viene approvato.

Il socio corrispondente Ricci presenta, per il Rendiconto, una nota dal titolo *Precisazioni sul calcolo esatto delle tensioni tangenziali in un cilindro sollecitato a flessione, taglio e torsione.*

Processo verbale dell'adunanza del dì 4 maggio 1935 - XIII.

Assistono i soci ordinari De Lorenzo, D'Erasmo, Diamare, Longo, Marcolongo. Masoni, Pascal Ernesto, Pierantoni ed i soci corrispondenti Carnera e Nobile.

Funziona da presidente il sen. De Lorenzo e da segretario il socio D'Erasmo.

Il segretario dà lettura del processo verbale dell'adunanza 13 aprile, che è approvato. Indi comunica:

1° i ringraziamenti della dott. Teresa Maresca, a cui l'Accademia attribuì il premio Sementini per una memoria di chimica applicata, e quelli del dott. Argentino, vincitore di metà del premio Oglialoro;

2° la lettera inviata il 27 aprile u. s. dal Commissario straordinario, riguardante il nuovo ordinamento della Società Reale e le norme da seguire per la sua applicazione. L'Accademia prende atto di tale lettera ed incarica il Presidente di esprimere al Commissario sen. Salvi i suoi ringraziamenti per quanto egli ha fatto, fa e farà per il nuovo ordinamento e per la sistemazione dei locali della Società Reale, con l'augurio che questa prosegua così la sua gloriosa tradizione scientifica, indirizzandola verso mete sempre più alte per il progresso delle scienze e per il lustro d'Italia.

Il Presidente dà il benvenuto al Gr. Uff. dott. Imparato, Direttore amministrativo dell'Università, che assiste all'adunanza in rappresentanza dell'ufficio di cancelleria della Società Reale di cui al comma 2° della suddetta lettera del Commissario, pregandolo di voler dare schiarimenti sulla futura amministrazione della Società Reale.

Il Presidente fa osservare, che in base alla suddetta lettera col 30 aprile u.s. è chiusa l'amministrazione particolare già tenuta dall'Accademia, di cui saranno però rispettati gl'impegni precedentemente presi. Quindi per ora non si potranno presentare lavori per la pubblicazione fino a quando non sarà comunicato dalla nuova amministrazione il bilancio preventivo per i mesi da Maggio a Dicembre del corrente anno.

In seguito a ciò, siccome le memorie per gli Atti hanno già raggiunto il limite consueto dei precedenti volumi, l'Accademia delibera la chiusura del vol. XX della serie 2ª, incaricando il segretario di voler provvedere a tutto ciò che occorre per il completamento del volume stesso.

Per ciò che riguarda le future pubblicazioni, l'Accademia — dopo discussione a cui hanno preso parte i soci Pierantoni, Pascal, Del Pezzo, Marcolongo, De Lorenzo e D'Erasmo — raccomanda al rappresentante della futura Cancelleria Dott. Imparato di volere tener conto nel nuovo regolamento, delle norme a tal proposito già esistenti nel Regolamento 12 marzo 1932.

L'Accademia poi delibera di soprassedere per ora alla convocazione e alla seduta straordinaria per la designazione dei nuovi soci.

Infine, visto che per il momento non si possono presentare lavori per la pubblicazione, decide di tenere ancora prima delle vacanze una sola seduta ordinaria, fissandola per il dì 8 giugno p. v., e di chiudere con ciò il fascicolo del Rendiconto del 1° semestre 1935.

Il Presidente interpreta il sentimento dei colleghi esprimendo al socio Pascal le condoglianze dell'Accademia per la morte della sorella. Il socio Pascal ringrazia.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio vengono segnalati alcuni lavori del consocio Cesaro, il primo volume di *Termotecnica* del socio Brunelli, i quattro volumi pubblicati dalla Società Edison in occasione del cinquantenario della fondazione, e il 18° volume delle opere di Cristiano Huygens, pubblicato dalla Società Olandese delle Scienze. — L'Accademia ringrazia i donatori.

Processo verbale dell' adunanza del dì 8 giugno 1935 - XIII

Sono presenti i soci ordinari Bakunin, De Lorenzo, del Pezzo, D'Erasmo, Diamare, Longo, Masoni, Pascal Ernesto, Pierantoni, Scorza, Signorini, ed i soci corrispondenti Carnera, Carrelli, Colamonico, Gallucci e Rizzo. Assiste il Cancelliere della Società Reale dott. Imparato.

Funziona da presidente il sen. De Lorenzo e da segretario il socio D'Erasmo. Scusa la sua assenza S. E. Giordani, assente da Napoli per motivi di ufficio.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 4 maggio, che viene approvato. Indi presenta il volume XX della 2.ª serie degli Atti, testè ultimato, nonchè il Rendiconto relativo al 1.° semestre 1935, e comunica le circolari del Commissario straordinario della Società

Reale, relative all'elenco aggiornato dei soci delle diverse categori e e alla nomina del gr. uff. Imparato a Cancelliere della Società Reale.

In séguito all' autorizzazione ricevuta dal Commissario della Società Reale, il presidente procede all' apertura della busta suggellata col motto « Provando e riprovando » che accompagnava il lavoro manoscritto dal titolo *La decomposizione catalitica della nitrammide*, al quale l' Accademia, nella sua adunanza del dì 8 dicembre 1934 - XIII, deliberò di assegnare il premio accademico del biennio 1933-34. Risulta autore del lavoro premiato il dott. Ugo Beretta (R. Istituto Chimico di Napoli), al quale vengono pertanto attribuite le lire 1000 del premio suddetto.

Il Presidente, infine, nel chiudere quest'ultima delle sedute, che per settantaquattro anni hanno segnato il trascorso cammino della gloriosa tradizione dell'Accademia, prima di passare nella via segnatale dal nuovo ordinamento, crede di interpretare il sentimento dei colleghi, dando un saluto ed un ringraziamento al vecchio usciere Ernesto Carafa, che è andato a riposo, dopo aver servito per cinquantadue anni fedelmente e lealmente l'Accademia.

INDICE

G. D' Erasmo — Relazione dei lavori compiuti dalla R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche durante l'anno 1934 . . Pag. 3

M. Bakunin — Relazione sul concorso a premio Agostino Oglialoro-Todaro. . . . . » 7

M. Bakunin — Relazione della Commissione giudicatrice del concorso al premio accademico pel biennio 1933-34 . . . . » 7

G. Andreoli — Sulle metriche Cayleyane delle V_2 ed una terza geometria non euclidea . . . . . » 9

G. Colosi — Commemorazione del socio Antonio Della Valle . . » 14

G. Andreoli — Elementi per una geometria metrico-differenziale di una V_1 in una V_2 isotropa cayleyana . . . . . » 20

A. Colucci — Sulla derivata ennesima di un Wronskiano. . . . » 24

M Viaro — Osservazioni del pianeta Saturno eseguite al R. Osservatorio di Capodimonte . . . . . » 29

G. Andreoli — Sulla topologia degli S_3 e la polidromia di intreccio . » 35

G. Gallucci — Su le curve razionali piane d' ordine n. . . . . » 40

G. Andreoli — Sugli indici di diffusione nei fenomeni statistici di ricambio sociale . . . . . » 43

C. L. Ricci — Precisazioni sul calcolo esatto delle tensioni tangenziali in un cilindro sollecitato a flessione, taglio e torsione . . » 50

G. Scorza — Le algebre del 4.° ordine (*Sunto della memoria inserita nel vol. XX degli Atti*) . . . . . » 60

G. De Lorenzo e G. D' Erasmo — Avanzi di ippopotamo nell'Italia meridionale (*Sunto della memoria inserita nel vol. XX degli Atti*) » 60

C. Carbonara — Affinità, trasformazioni cremoniane e gruppi automorfi delle algebre complesse del 3.° ordine dotate di modulo (*Sunto della memoria inserita nel vol. XX degli Atti*) . . » 60

G. B. Rizzo — Osservazioni meteorologiche raccolte nell' anno 1934 nell' Istituto di Fisica terrestre della R. Università di Napoli. » 61

Programma di concorso al premio accademico per il biennio 1935-36 . » 75

Programma di concorso al premio Sementini per il biennio 1935-36 . » 76

Programma di concorso al premio Gabriele e Ruggero Torelli . . » 77

Programma di concorso al premio Agostino Oglialoro-Todaro . . » 78

Processi verbali delle adunanze 5 e 12 gennaio, 2 e 9 febbraio, 2 e 9 marzo, 6 e 13 aprile, 4 maggio, 8 giugno 1935 . . . » 79

Redattore responsabile ai termini di legge: prof. U. PIERANTONI

RENDICONTO

DELL'ACCADEMIA

DELLE

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

(CLASSE DELLA SOCIETÀ REALE DI NAPOLI)

SERIE IV. — VOL. V. — (Anno LXXIV)

Fascicoli 7 a 12 - Luglio a Dicembre 1935 (XIII - XIV)

NAPOLI
S. I. E. M. - STABILIMENTO INDUSTRIE EDITORIALI MERIDIONALI
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE FIS. E MATEM.
S. Giovanni Maggiore Pignatelli, 2
1936 - XIV

Pubblicato il dì 1. Febbraio 1936 - XIV

Generalizzazione della teoria statica degli archi piani a grande curvatura.

Nota dell'ing. **Guido Del Vecchio**

(Adunanza del dì 9 novembre 1935 - XIV)

Sunto. — Si tratta il problema dei solidi a semplice curvatura nelle condizioni generali in cui le sezioni radiali e le caratteristiche delle sollecitazioni esterne non siano simmetriche rispetto al piano contenente l'asse geometrico del solido.

Si esaminano i casi della flessione composta deviata e del taglio obliquo utilizzando le proprietà di una sezione che si denomina « virtuale » e viene dedotta da quella effettiva del solido con operazioni molto semplici.

Premessa. — Come è noto, per gli archi aventi l'asse geometrico leggermente incurvato, risulta sufficiente, specie per le applicazioni tecniche, eseguire il calcolo degli sforzi interni e delle deformazioni adottando le stesse formule valide per i solidi ad asse rettilineo; occorre invece tener conto della conformazione dell'asse geometrico allorchè il rapporto tra la dimensione radiale del solido ed il raggio di curvatura comincia ad assumere valori sensibili.

Le varie trattazioni all'uopo escogitate prendono in esame un solido avente per asse geometrico una curva piana e con tutte le sezioni trasversali simmetriche rispetto al piano che contiene l'asse geometrico; per tali solidi inoltre si considerano soltanto sollecitazioni esterne aventi caratteristiche simmetriche rispetto al piano suddetto. Si tratta quindi di procedimenti che si applicano soltanto ad una limitata categoria di solidi curvi (solidi a *semplice curvatura* simmetrici e simmetricamente sollecitati rispetto al piano dell'asse geometrico). Gli altri tipi di solidi curvi di forma più generica, ed in cui manchino le condizioni di cui sopra, non vengono generalmente considerati.

La determinazione delle espressioni fondamentali che legano la tensione normale, agente in un punto generico della sezione radiale, con le caratteristiche delle sollecitazioni esterne, si effettua, in tali trattazioni, partendo dall'ipotesi della conservazione delle sezioni piane. Tale ipotesi, nel caso dei solidi ad asse curvilineo, dà luogo, per i valori della dilatazione diretta normalmente alla sezione, ad una legge di variazione non più lineare (come avviene per i solidi ad asse rettilineo) ma quadratica.

Allo scopo di semplificare le espressioni e di agevolare i calcoli, specie per i solidi aventi sezioni trasversali a contorno regolare e semplice, si introducono nelle varie trattazioni dei coefficienti nei quali si sintetizza l'effetto della nuova condizione dovuta alla curvatura del solido e che, calcolati una volta tanto per una data sezione possono servire, nei diversi casi, indipendentemente dal valore delle sollecitazioni esterne. Così in alcune trattazioni si pone, con significati ben noti per i simboli [1]:

$$\int_A \frac{v}{r+v}\,dA = -\varkappa A$$

essendo $\varkappa$ un numero, mentre in altre [2]) si considera il termine:

$$\int_A v^2 \frac{r}{r+v}\,dA = Z$$

nella quale Z assume le dimensioni di un momento di inerzia.

Le espressioni dei detti fattori, vengono calcolate per le sezioni più semplici (circolare, rettangolare ecc.) mediante sviluppi in serie, mentre, per le sezioni a contorno di forma generica si rimanda, nella prima delle esposte trattazioni, al calcolo grafico del valore di $\varkappa$.

Ciò premesso, considerando che, per quanto non frequente, sussiste tuttavia la possibilità di dover prendere in esame dei solidi a semplice curvatura per i quali le sezioni radiali e le caratteristiche delle sollecitazioni esterne non siano tutte simmetriche rispetto al piano contenente l'asse geometrico, si è ritenuto che una trattazione generale del problema, nella quale vengano rimosse le ipotesi restrittive anzidette, presenti qualche interesse, specie quando si può constatare, come sarà fatto nelle pagine seguenti, che tale generalizzazione porta ad espressioni che non sono molto più complesse di quelle attualmente adottate per la trattazione del caso particolare del solido simmetrico rispetto al piano contenente l'asse geometrico.

---

[1]) C. Bach und R Baumann, *Elastizität und Festigkeit*, 9 Auflage Springer, Berlin, 1924.

C. Guidi, *Lezioni sulla Scienza delle Costruzioni Parte II.* Torino, 1929.

[2]) H. Müller-Breslau, *Die Neuren Methoden der Festigkeitslehre.* Leipzig, 5 Auflage.

Tensioni normali alla sezione radiale (tensione e flessione).

PRELIMINARI. — Passando quindi all'esame del problema propostoci, consideriamo (fig. 1) un elemento di solido di sezione generica, privo di assi di simmetria, incurvato intorno ad una retta r (contenuta

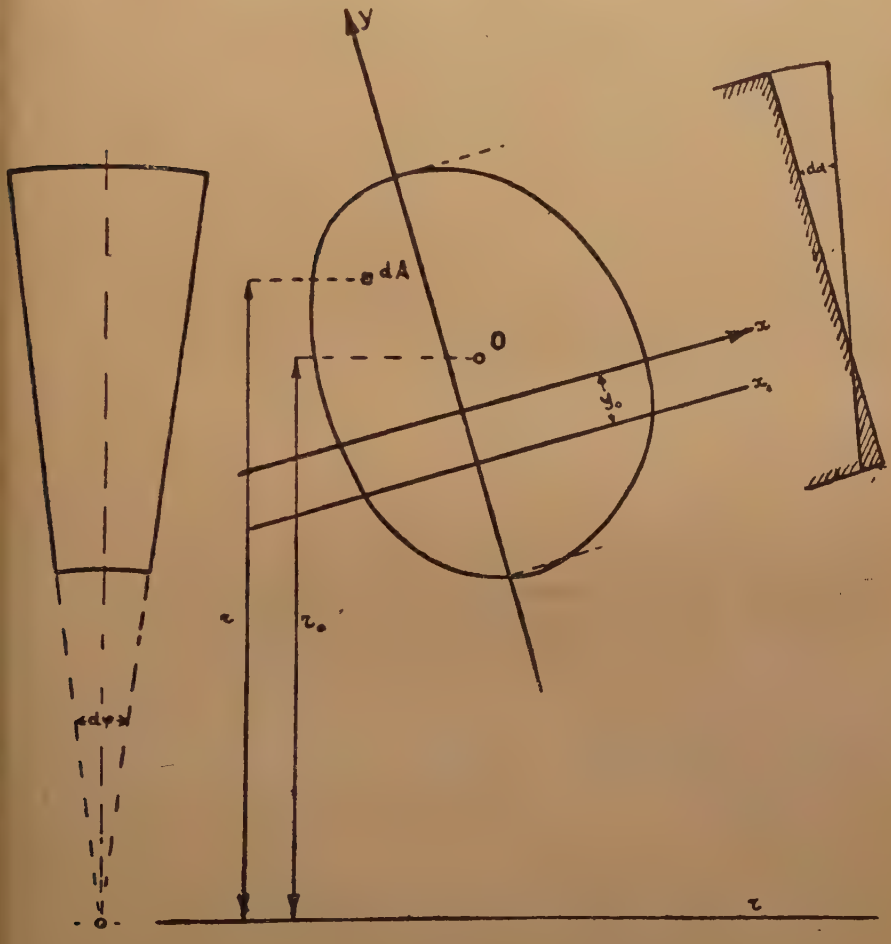


Fig. 1.

nel piano della sezione trasversale generica) e sollecitato da una forza diretta normalmente alla sezione ed applicata in punto generico. Dall'ipotesi della conservazione delle sezioni piane risulta che le tracce delle fibre indeformate si troveranno, anche in questo caso, lungo un segmento rettilineo, che conserva le caratteristiche di asse neutro.

Indichiamo:

Con x_1 tale asse neutro;

Con x ed y una coppia di assi coordinati ortogonali passanti per un punto della sezione, che per il momento riterremo generico, e rispettivamente diretti parallelamente e normalmente ad x_1.

Con y_0 la distanza tra x ed x_1;

Con A e dA rispettivamente la sezione radiale ed un suo elemento;

Con r ed r_0 rispettivamente la distanza dall'asse di curvatura di una fibra generica e di quella baricentrica;

Con $d\varphi$ l'angolo compreso tra le due sezioni delimitanti il tronco elementare che si considera;

Con dt e dt_0 rispettivamente le lunghezze $r\,d\varphi$ ed $r_0 d\varphi$;

Con $d\alpha$ l'angolo di cui ruota la sezione terminale del tronco (intorno all'asse neutro x_1) per effetto della deformazione del tronco stesso;

Con E il modulo d'elasticità;

Con σ_t ed ε_t rispettivamente la componente speciale di tensione e quella di deformazione agenti normalmente alla sezione considerata;

Con N la forza agente normalmente alla sezione nel punto X;

Con M_x il momento statico di N rispetto ad x.

Per l'equilibrio delle forze applicate sulla sezione A sussistono le relazioni:

$$(1)\qquad N=\int_A \sigma_t\,dA = E\int_A \varepsilon_t\,dA$$
$$M_x=\int_A \sigma_t\,y\,dA = E\int_A \varepsilon_t\,y\,dA$$

le quali, se si esprime la ε_t come rapporto tra l'allungamento e la lunghezza primitiva di ciascuna fibra e si pone $E\frac{d\alpha}{dt_0}=k$, diventano ovviamente:

$$(2)\qquad N=E\int_A \frac{(y_0+y)\,d\alpha}{r\,d\varphi}\,dA = E\frac{d\alpha}{dt_0}\int_A (y_0+y)\,\frac{r}{r}\,dA = k\int_A (y_0+y)\,\frac{r_0}{r}\,dA$$
$$M_x=E\int \frac{(y_0+y)d\alpha}{r\,d\varphi}\,y\,dA = E\frac{d\alpha}{dt_0}\int_A (y_0+y)\,y\,\frac{r_0}{r}\,dA = k\int_A (y_0+y)\,y\,\frac{r_0}{r}\,dA$$

Sezione virtuale. — Se si pone inoltre $\frac{r_0}{r}\,dA = dA^*$ e si considera una « sezione virtuale » A^* ricavata da quella effettiva A sostituendo ad ogni elemento di essa un altro avente la stessa posizione, ma un'area modificata secondo il rapporto $\frac{r_0}{r}$, le dette espressioni si riducono ri-

spettivamente a:

$$N = k\int_{A^*}(y_0 + y)\,dA^*$$

(2′)

$$M_x = k\int_{A^*}(y_0 + y)\,y\,dA^*$$

Si consideri che, per gli effetti dello studio dei momenti di primo e secondo ordine, come alla distribuzione di aree di una sezione piana ordinaria può sostituirsi la distribuzione di masse di una lamina piana a spessore e densità costanti, così alla distribuzione di aree una delle *sezioni virtuali* testè definite può sostituirsi la distribuzione di masse di una lamina piana a spessore costante e densità variante da punto a punto secondo il rapporto $\frac{r_0}{r}$. Poichè anche per una lamina così costituita, valgono, riferite alla nuova distribuzione di masse, proprietà analoghe a quelle della lamina a densità costante, si potrà affermare, senza ulteriore dimostrazione, che anche per la *sezione virtuale* valgono, riferite alla differente distribuzione di aree, per i momenti di primo o secondo ordine, proprietà perfettamente analoghe a quelle della sezione ordinaria.

Basterà quindi scegliere l'origine degli assi coordinati x, y coincidente col baricentro O^* della sezione virtuale A^* perchè le (2′) si trasformino nelle:

$$N = k\,y_0\,A^*$$

(3)

$$M_x^* = k\,I_x^*$$

in cui con I_x^* si è indicato il momento d'inerzia della distribuzione di aree dA^* della *sezione virtuale* rispetto all'asse (baricentrico) x ed al simbolo M_x si è sostituito quello M_x^* per ricordare che l'asse di riferimento dei momenti è baricentrico per la sezione virtuale.

Espressioni della σ_t. — Tenendo presente che da una qualunque delle (1), paragonata con la corrispondente delle (2), risulta;

$$\sigma_t = k\,(y_0 + y)\frac{r_0}{r} \tag{4}$$

si potrà scrivere in definitiva, sostituendo nella (4) i valori di k forniti dalle (3) e contrassegnando la y con * per la stessa ragione addotta a proposito del momento M_x:

$$\sigma_t = \frac{r_0}{r}\left[\frac{N}{A^*} + \frac{M_x^*\,y^*}{I_x^*}\right] \tag{5}$$

Se si dividono i termini dell'ultimo quoziente che compare nella (5) per il quadrato del coseno dell'angolo ψ'' che l'asse delle ordinate y forma con quello di sollecitazione $s \equiv O^*X$ e si contrassegnano con l'indice s i simboli relativi alle ordinate ed ai momenti di primo e secondo ordine per i quali le distanze sono computate parallelamente ad s, la (5) diventa:

$$\sigma_t = \frac{r_0}{r}\left[\frac{N}{A^*} + \frac{M_s^* y_s^*}{I^*_{ss}}\right] \tag{5'}$$

Le nuove espressioni trovate, oltre ad essere affatto generali ed indipendenti da qualsiasi ipotesi restrittiva relativa alla forma ed all'orientamento della sezione del solido, presentano il vantaggio di risultare analoghe alle formule corrispondenti che, per i solidi ad asse rettilineo, si deducono nello studio del problema di De Saint Venant.

Si osservi anzi, analogamente a quanto si fa per le travi, che il punto di applicazione della N deve, per l'equilibrio, coincidere col baricentro delle forze elementari $\sigma_t\, dA$ agenti sulla sezione sollecitata. Tenendo presente la (4), dalla quale risulta:

$$\sigma_t\, dA = k(y_0 + y)\frac{r_0}{r}\, dA = k(y_0 + y)\, dA^*$$

si può affermare che il baricentro delle $\sigma_t\, dA$ è precisamente il centro relativo dell'asse neutro rispetto alla distribuzione di aree della *sezione virtuale*, cioè l'antipolo dell'asse neutro rispetto all'ellisse centrale d'inerzia della *sezione virtuale* stessa.

Si ritrova quindi, anche per le sezioni radiali dei solidi curvi, una corrispondenza perfettamente analoga a quella esistente nelle sezioni trasversali delle travi, tra centro di sollecitazione ed asse neutro.

Data la evidente analogia tra i risultati ora ottenuti e quelli già noti per i solidi rettilinei, riteniamo inutile fermarci ulteriormente sull'esame delle varie conseguenze a cui portano i risultati suddetti e delle varie forme sotto cui si possono esprimere la (5) e la (5').

Rimandando quindi per tale esame a quanto nei trattati è esposto sulla trattazione per i solidi ad asse rettilineo, ci limitiamo qui ad osservare che riferendoci alle componenti M_ξ^* ed M_η^* del momento M_s^* intorno agli assi principali di inerzia, la (5), in base al principio di sovrapposizione degli stati di equilibrio, diviene:

$$\sigma_t = \frac{r_0}{r}\left[\frac{N}{A^*} + \frac{M_\xi^* \eta^*}{I_\xi^*} + \frac{M_\eta^* \xi^*}{I_\eta^*}\right] \tag{5''}$$

In base alle esposte considerazioni, si possono inoltre sinteticamente esprimere i risultati ottenuti affermando che: « *Per determinare la tensione longitudinale in un punto generico di un solido a*

grande curvatura sollecitato a pressione e flessione, si possono applicare le stesse formule valide per i solidi ad asse rettilineo, purchè a tutti i parametri geometrici relativi alla sezione effettiva, si sostituiscano gli analoghi parametri dedotti nella sezione virtuale testè definita e si moltiplichi il valore ottenuto per il rapporto (variabile da punto a punto) $\frac{r_0}{r}$ ».

Può essere opportuno constatare che per r_0 tendente all'infinito, il rapporto $\frac{r_0}{r}$ tende all'unità, la sezione virtuale va a coincidere con quella effettiva e la (5), nelle sue varie forme, si identifica con le analoghe relative alle travi rettilinee.

PARAMETRI GEOMETRICI DELLA SEZIONE VIRTUALE. — Per il calcolo dei parametri geometrici della *sezione virtuale* è opportuno tener presenti alcune proprietà che possono facilmente dedursi dalle equazioni dei momenti di primo e secondo ordine intorno all'asse di curvatura r.

Si ha infatti per i momenti statici di A e di A^* rispetto ad r:

$$A^* r^* = \int_{A^*} r \, dA^* = r_0 \int_A dA = r_0 A \tag{6}$$

ed inoltre, per le coordinate u_1^* e v_1^* del centro relativo di A^* rispetto ad r, riferite ad una coppia di assi ortogonali costituita da r e dalla normale ad essa passante per O^*.

$$u_1^* = \frac{\int_{A^*} r\,u\,dA^*}{\int_{A^*} r\,dA^*} = \frac{r_0 \int_A u\,dA}{r_0 \int_A dA} = \frac{\int_A u\,dA}{A}$$

$$v_1^* = \frac{\int_{A^*} r^2\,dA^*}{\int_{A^*} r\,dA^*} = \frac{r_0 \int_A r\,dA}{r_0 \int_A dA} = \frac{r_0^2 A}{r_0 A} = r_0 \tag{7}$$

La (6) esprime che i momenti di A e di A^* rispetto ad r sono uguali, e consente quindi di calcolare come quarta proporzionale il valore di A^* non appena determinata la posizione di O^*; le (7) invece, mostrano che il centro relativo di A^* rispetto ad r coincide col baricentro O della sezione effettiva A. Da quest'ultima proprietà risulta che la direzione OO^* è coniugata della direzione di r rispetto all'ellisse centrale d'inerzia della *sezione virtuale* e che inoltre si può immediatamente costruire, come media proporzionale tra segmenti noti, il semidiametro della ellisse stessa disteso secondo la direzione OO^*.

Si ha così, mediante la semplice determinazione del baricentro

della *sezione virtuale*, una coppia di direzioni coniugate ed il diametro dell'ellisse centrale disteso su una di tali direzioni.

Le costruzioni grafiche per la ricerca del baricentro e della ellisse di inerzia della *sezione virtuale*, sono perfettamente identiche a quelle valide per le sezioni ordinarie, quando si abbia l'avvertenza di dividere la sezione in strisce parallele all'asse di curvatura ed applicare nei baricentri delle strisce stesse, in luogo delle aree elementari effettive $b \cdot dr$, quelle virtuali $b \cdot dr \frac{r_0}{r}$. Tale sostituzione si può eseguire graficamente mediante la costruzione di quarte proporzionali.

Da quanto si è detto più sopra, determinata la posizione del baricentro O^*, risulta già espletata la prima parte delle costruzioni che nelle sezioni ordinarie si eseguono per la ricerca del centro relativo rispetto ad un dato asse: si conosce infatti che, rispetto ad r, il centro relativo della sezione virtuale è O. Occorre quindi determinare soltanto il centro relativo della *sezione virtuale* rispetto ad un asse parallelo ad OO^*.

Tale determinazione si effettua agevolmente applicando parallelamente ad OO^* le forze $b.dr\frac{r_0}{r}$ nei baricentri delle strisce già determinate, collegandole con un primo poligono funicolare, applicando successivamente, e sempre nella stessa direzione, i momenti di tali forze nei centri relativi delle strisce stesse rispetto all'asse considerato e collegando infine con un secondo poligono funicolare i momenti stessi. Nella intersezione della risultante dei momenti con la parallela ad r per O^* si ha ovviamente il centro relativo cercato.

Le costruzioni occorrenti successivamente per avere i semidiametri della ellisse sono ben note.

Diagramma della σ_t. — Ottenuti i valori dei momenti d'inerzia mediante le costruzioni suddette ed il valore di A^* in base alla proprietà espressa dalla (6), si può passare a tracciare il diagramma delle σ_t agenti sulla sezione lungo una retta y normale all'asse neutro.

Detto ψ l'angolo che l'asse neutro x_1 forma con quello di curvatura r e $y_r = \frac{r_0}{\cos\psi}$ la distanza tra O ed r misurata parallelamente ad y (fig. 2), la (5) si può scrivere, sopprimendo il fattore comune $\cos\psi$:

$$\sigma_t = \frac{y_r}{y_r + y}\left[\frac{N}{A^*} + \frac{M_x^* y^*}{I_x^*}\right] \tag{8}$$

la quale esprime che il diagramma di σ_t in funzione di y è una conica.

Gli asintoti risultano reali e paralleli agli assi coordinati (σ_t ed y). Si tratta quindi, anche nel caso generale, di una iperbole equilatera.

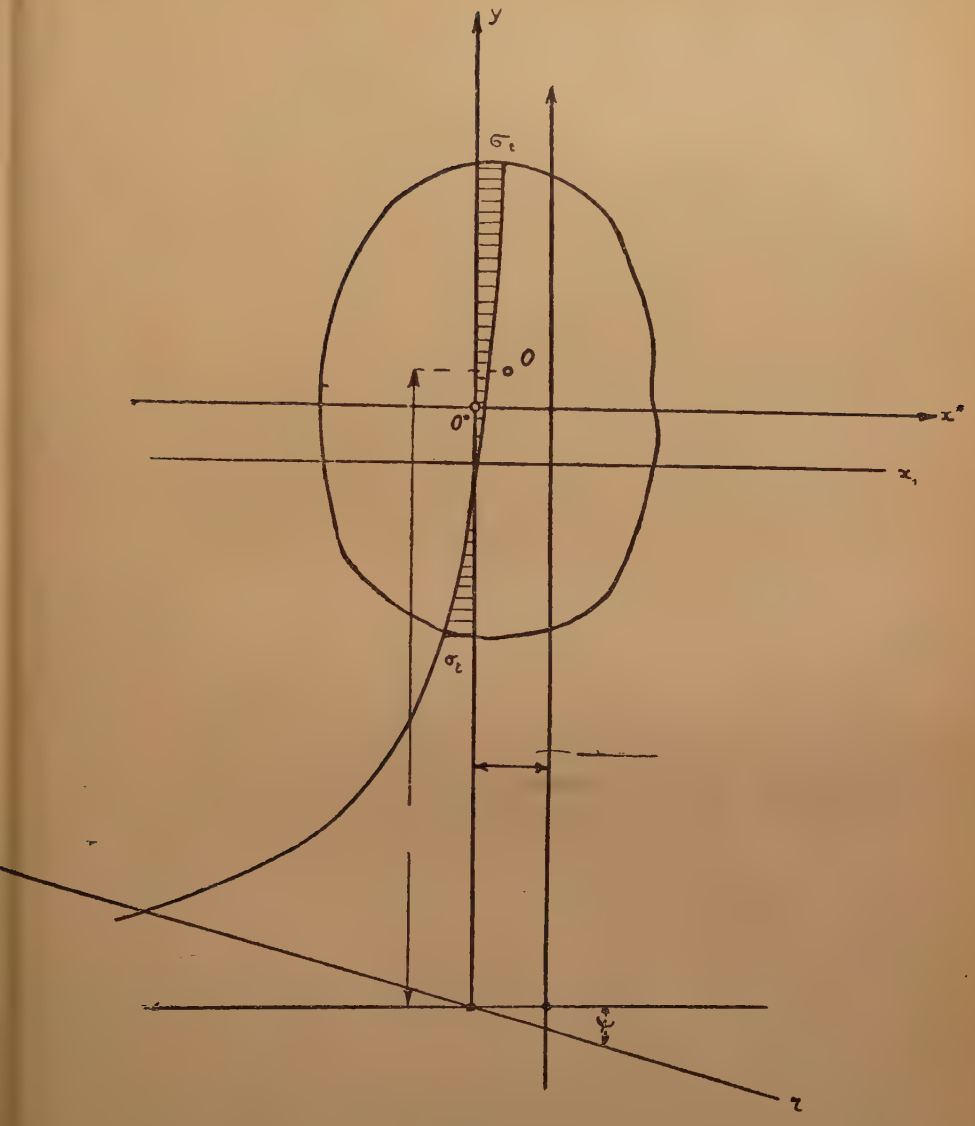


Fig. 2.

Osservando che :

$$\text{per} \quad y = -y_r \qquad \sigma_t = \infty$$

$$\text{e per} \quad y = +\infty \qquad \sigma_t = \frac{M_x^*}{I_x^*} y_r$$

Si deduce che l'asintoto parallelo alle σ_t passa per l'intersezione dell'asse y con quello di curvatura e l'altro asintoto, parallelo ad y, ne dista di :

$$\frac{M_x^*}{I_x^*} y_r = \frac{M_x^*}{I_x^*} \cdot \frac{r_0}{\cos \psi}.$$

Nota la posizione degli asintoti, basta conoscere un sol punto dell'iperbole (che può essere ad esempio l'intersezione di y con l'asse neutro, in cui $\sigma_t = 0$) per poterla tracciare completamente con i metodi della geometria proiettiva.

Si osservi infine che nel caso particolare in cui l'asse neutro è normale a quello di curvatura ($\cos\psi = 0$), i due asintoti vanno all'infinito ed il diagramma della σ_t diventa rettilineo secondo l'espressione:

$$\sigma_t = \frac{N}{A^*} + \frac{M_x^* y^*}{I_x^*}$$

a cui tende la (8) per y_r tendente ad ∞.

Lavori di deformazione. — Il lavoro di deformazione, relativo al tronco elementare compreso tra due sezioni formanti tra loro l'angolo $d\varphi$, si può calcolare ricorrendo alla ben nota espressione:

$$dL = \int_V \Phi \, dV \tag{9}$$

in cui l'integrale è esteso al volume dell'elemento e Φ rappresenta, come è noto, il potenziale elastico.

Per il caso attuale in cui soltanto la σ_t è diversa da zero (non avendo tenuto conto delle eventuali tensioni radiali) la Φ si riduce a:

$$\Phi = \frac{\sigma_t^2}{2E}$$

da cui risulta, tenendo presente la (5):

$$\int_V \Phi \, dV = \frac{1}{2E} \int_V \sigma_t^2 \, dV = \frac{1}{2E} \int_V \frac{r_0^2}{r^2} \left[\frac{N}{A^*} + \frac{M_x^*}{I_x^*} y^* \right]^2 dt \, dA =$$

$$= \frac{1}{2E} \int_{A^*} \left[\frac{N}{A^*} + \frac{M_x^*}{I_x^*} y^* \right]^2 dt_0 \, dA^* = \frac{dt_0}{2E} \left[\frac{N^2}{A^*} + \frac{M_x^{*2}}{I_x^*} \right].$$

Si può scrivere quindi in definitiva:

$$dL = \frac{dt_0}{2E} \left[\frac{N^2}{A^*} + \frac{M_x^{*2}}{I_x^*} \right]. \tag{10}$$

È opportuno tener presente che, in base al primo teorema di Castigliano, la derivata di tale espressione rispetto ad N divisa per la lunghezza dt_0 del tronco, rappresenta l'allungamento unitario (traslazione della faccia terminale nella direzione della N, riferita alla

lunghezza del tronco):

$$\delta = \frac{1}{dt_0}\frac{\partial L}{\partial N} = \frac{N}{EA^*} \tag{11}$$

ed analogamente, la derivata della stessa espressione rispetto ad M_x^* divisa per la lunghezza dt_0 del tronco ci dà l'inflessione unitaria (rotazione della faccia terminale intorno all'asse neutro, riferita alla lunghezza del tronco):

$$\omega = \frac{1}{dt_0}\frac{\partial L}{\partial M_x^*} = \frac{M_x^*}{EI_x^*}. \tag{12}$$

Casi particolari. — Una rappresentazione molto espressiva dell'effetto della curvatura, che può riuscire utile per le applicazioni tecniche, è consentita allorchè l'asse neutro risulta parallelo a quello di curvatura, o, ciò che è lo stesso, quando l'asse di sollecitazione è orientato secondo OO^*.

In tale caso infatti, non essendo necessario determinare il semiasse dell'ellisse centrale diretto parallelamente ad r, si può sostituire, senza alterare i risultati finali, a ciascuna striscia elementare parallela all'asse di curvatura, un'altra striscia avente lo stesso baricentro, uguale altezza, e la larghezza modificata secondo il rapporto $\frac{r_0}{r}$.

Con una tale sostituzione risulterà più immediatamente evidente l'effetto che nel comportamento statico del solido è prodotto dalla curvatura, riducendosi tale effetto, nei riguardi dell'efficienza statica della sezione, soltanto ad una variazione del contorno della sezione stessa (oltre, beninteso alla riduzione delle σ_t secondo il rapporto $\frac{r_0}{r}$).

Un ulteriore vantaggio si potrà realizzare allorchè la sezione del solido è a contorno poligonale. In tal caso infatti i lati si trasformano in archi di iperbole e poichè, specie quando i valori del raggio non sono eccessivamente piccoli rispetto alla dimensione radiale della sezione, la curvatura di tali archi rimane abbastanza limitata, risulterà agevole sostituire per approssimazione, nel contorno della sezione trasformata, a detti archi dei segmenti rettilinei, riducendo così il problema allo studio di una sezione ordinaria a contorno rettilineo che potrebbe, in qualche caso, essere addirittura già noto.

Naturalmente per ottenere le tensioni effettive, bisognerà sempre moltiplicare per $\frac{r_0}{r}$ le σ_t ottenute con le formule dei solidi ad asse rettilineo.

Tensioni tangenziali (taglio),

PRELIMINARI. — Si consideri ora la sezione radiale sollecitata da uno sforzo tagliante T_s, diretto secondo la direzione generica s. Sia x^*

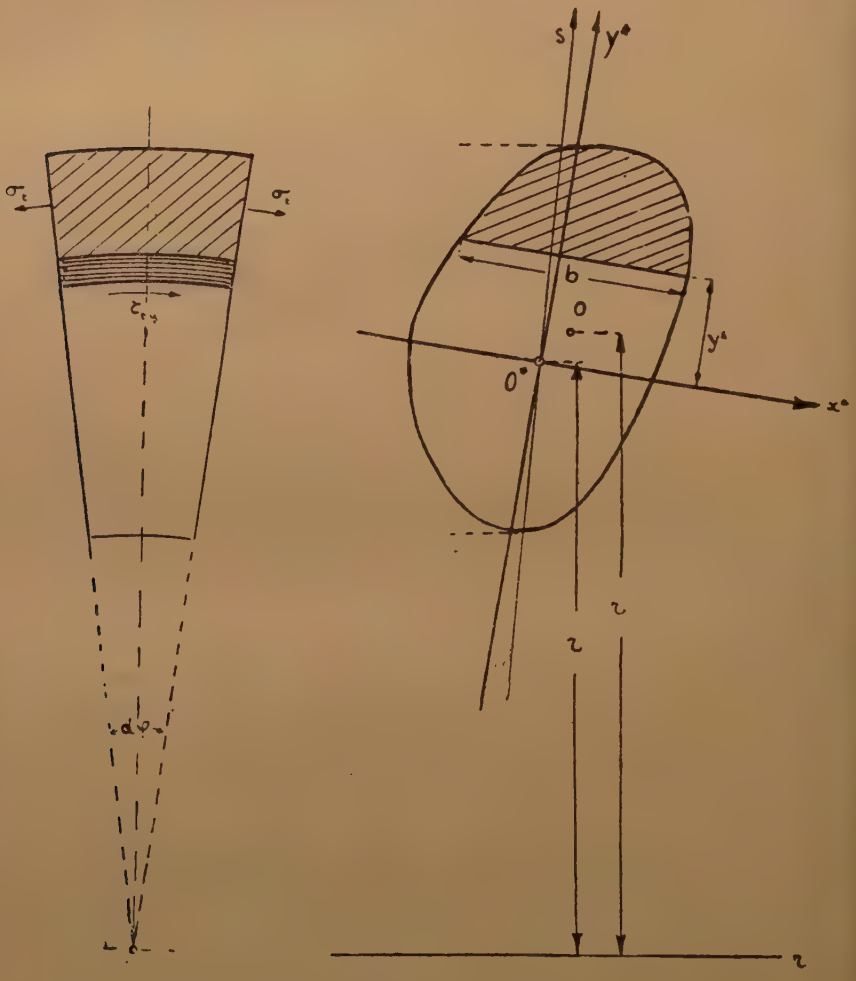


Fig. 3.

l'asse neutro (baricentrico rispetto alla sezione virtuale) relativo al momento flettente $T_s\,dt$, b una corda parallela ad x^*, ed, al solito, r l'asse di curvatura dell'elemento (fig. 3). Si indichi inoltre con τ_{ty} la componente della tensione tangenziale agente sugli elementi della sezione radiale e diretta secondo l'asse y^* normale ad x^*; com'è noto, ad essa è, in ogni punto, uguale l'analoga tensione agente sull'elemento piano normale ad y^* e diretta normalmente alla sezione radiale.

Per ottenere una relazione tra la τ_{ty}, le caratteristiche delle sollecitazioni esterne ed i parametri geometrici della sezione, si prenda in esame una delle due porzioni in cui il tronco elementare delimitato da due piani formanti tra loro l'angolo $d\varphi$ viene diviso dalla superficie conica generata dalla rotazione della corda b intorno ad r. Per la particella così delimitata si scriva l'equazione di equilibrio intorno all'asse r in modo analogo a quello che si segue per i solidi simmetrici [1]), tenendo presenti le notazioni adottate ed indicando rispettivamente con S_0 ed A_0 le superficie delimitanti inferiormente e trasversalmente il tronco considerato:

$$\int_{S_0} \tau_{ty}\, r\, dS_0 = \int_{A_0} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \varphi}\, d\varphi\, r\, dA_0$$

equazione che si può ovviamente trasformare nella:

$$\int_b \tau_{ty}\, r^2\, db = \int_{A_0} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \varphi}\, r\, dA \tag{13}$$

Per calcolare la $\frac{\partial \sigma_t}{\partial \varphi}$ occorre tener presente la scelta fatta per gli assi di riferimento delle caratteristiche delle sollecitazioni esterne; secondo tale scelta, alquanto più generale di quella solitamente adottata nel caso particolare del solido simmetrico rispetto al piano di curvatura, le relazioni esistenti tra le caratteristiche stesse, detto ψ' (fig. 3) l'angolo tra s e v (normale ad r), si modificano come segue:

$$\frac{\partial N}{\partial \varphi} = - T_s \cos \psi'$$

$$\frac{\partial T_s}{\partial \varphi} = \frac{N}{\cos \psi'}$$

$$\frac{\partial M_s}{\partial \varphi} = T_s\, r^*$$

Espressione della τ_{ty}. — Ciò premesso passiamo allo sviluppo dei vari termini che compaiono nella (13). Si ha in primo luogo:

$$\frac{\partial \sigma_t}{\partial \varphi} = \frac{r_0}{r} \left[- \frac{T_s \cos \psi'}{A^*} + \frac{T_s\, r^*\, y_s^*}{I^*_{xs}} \right]$$

---

[1]) Cfr. C. L. Ricci, *Complementi alla teoria statica degli archi piani a grande curvatura.* Memorie della Reale Accademia d'Italia, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, Vol. III (Ingegneria) n.° 1, 1932.

e quindi:

$$\int_{A_0} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \varphi} r\, dA = \int_{A_0} \left[-\frac{T_s \cos\psi'}{A^*} + \frac{T_s r^* y_s^*}{I^*_{xs}} \right] r_0\, dA =$$

$$= \left[-\frac{T_s A_0}{A^*} \cos\psi' + \frac{T_s r^* M_{0s}}{I^*_{xs}} \right] r_0 =$$

$$= r_0 r^* \frac{T_s M_{0s}}{I^*_{xs}} \left[1 - \frac{\rho^{*2}_{xs}}{r^*} \frac{A_0}{M_{0s}} \cos\psi' \right]$$

Si osservi ora che per una ben nota proprietà il quoziente $\rho^{*2}_{xs} : \frac{r^*}{\cos\psi'}$ rappresenta la distanza, misurata parallelamente ad s, tra il baricentro O^* della sezione virtuale e la parallela ad x^*, condotta per il centro relativo della sezione stessa rispetto all'asse di curvatura. Ma tale centro relativo, come baricentro dei momenti statici $r\, dA^* = r_0\, dA$, coincide, come si è visto, col baricentro O dell'area effettiva A, e quindi il rapporto suddetto, altro non è che la distanza δ_s tra O ed x^* misurata nella direzione s.

Per ovvi motivi anche il rapporto $\frac{M_{0s}}{A_0}$ si riduce ad una lunghezza e precisamente alla distanza δ_{0s} misurata anch'essa nella direzione di s tra il baricentro dell'area effettiva A_0 e l'asse neutro x^*.

Si avrà quindi, sostituendo tali valori nella espressione precedente

$$\int_{A_0} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \varphi} r\, dA = r_0 r^* \frac{T_s M_{0s}}{I^*_{xs}} \left[1 - \frac{\delta_s}{\delta_{0s}} \right]$$

ovvero, sopprimendo il fattore comune $\cos\psi''$

$$\int_{A_0} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \varphi} r\, dA = r_0 r^* \frac{T_y M_0}{I_x^*} \left[1 - \frac{\delta_y}{\delta_{0y}} \right]$$

con ovvi significati per i nuovi simboli.

Per ciò che riguarda il primo membro della (13) si osservi che, l'ipotesi di ritenere la τ_{ty} costante lungo la corda, che è certamente la più opportuna nei solidi ad asse rettilineo, ed anche in quelli ad asse curvilineo quando la corda b è parallela all'asse di curvatura potrebbe vantaggiosamente invece, in questo caso, essere sostituita da un'altra in cui si ritenga costante il prodotto $\tau_{ty}\, dl$ che rappresenta la tensione tangenziale agente sulla superficie S_0 in corrispondenza di ciascun elemento db della corda b.

Per gli altri casi più sopra citati le due ipotesi coincidono e quindi, anche adottando questa seconda, si può ritenere di non discostarsi dai criteri generalmente già seguiti fin'ora nelle analoghe trattazioni. Que-

st'ultima ipotesi presenta però, rispetto alla prima, il vantaggio di dar luogo a valori della τ_{ty} certamente più prossimi a quelli esatti, perchè nel distribuire il valore della τ_{ty} lungo la superficie S_0, detta ipotesi tien conto, sia pure approssimativamente del fatto che le variazioni di lunghezza dt, degli elementi $dS_0 = dt\,db$ di tale superficie, non possono non influire sui valori della τ_{ty} nel senso di farla aumentare al diminuire dell'area degli elementi dS_0 che sopportano la sollecitazione tangenziale.

Comunque, dato anche che entrambe le ipotesi formulate dànno luogo ad espressioni molto semplici del primo membro della (13) vennero prese entrambe in considerazione ottenendo rispettivamente:

$$\int \tau_{ty}\, r^2\, db = \underline{\tau_{ty}} \int_b r^2\, db = \underline{\tau_{ty}}\, r_b\, r'_b\, b$$

e

$$\int_b \tau_{ty}\, r^2\, db = \underline{\tau_{ty}}\, r \int_b r\, db = \underline{\tau_{ty} r}\, r_b\, b$$

nelle quali si sono indicate con r_b ed r_b' i raggi di curvatura misurati in corrispondenza del baricentro (punto medio) della corda b e del centro relativo di essa (considerata come una distribuzione lineare uniforme). Si sono inoltre sottolineati i simboli corrispondenti alle grandezze che nei due casi si ritengono rispettivamente costanti.

Sostituendo i valori trovati nella (13) si ottengono per la τ_{ty} le seguenti espressioni:
nella ipotesi τ_{ty} costante lungo la corda:

$$\underline{\tau_{ty}} = \frac{r_0\, r^*}{r_b\, r_b'} \cdot \frac{T_y M_0}{I_x^*\, b}\left[1 - \frac{\delta_y}{\delta_{0y}}\right] \tag{14}$$

e nella ipotesi $r \cdot \tau_{ty}$ costante lungo la corda:

$$\underline{\tau_{ty}} = \frac{r_0\, r^*}{\underline{r}\, r_b} \cdot \frac{T_y M_0}{I_x^*\, b}\left[1 - \frac{\delta_y}{\delta_{0y}}\right] \tag{14'}$$

Si può constatare che anche in questo caso, al variare della posizione della corda parallela ad x^*, la τ_{ty} cresce da zero ad un massimo, che si verifica in prossimità del baricentro O^*, e successivamente diminuisce fino ad annullarsi nuovamente. Si ha infatti:

per $A_0 = O$, $M_0 = O$ e quindi $\tau_{ty} = O$
e per $A_0 = A$, $\delta_{0y} = \delta_y$ e quindi ancora $\tau_{ty} = O$.

Allorchè inoltre il raggio di curvatura tende all'infinito i coefficienti $\frac{r_0\, r^*}{r_b\, r_b'}$ e $\frac{r_0\, r^*}{r\, r_b}$ tendono all'unità, mentre la distanza δ_y va a zero

in maniera da ricondurre l'espressione ora trovata all'analoga valida per i solidi ad asse rettilineo.

Espressione della τ_t. — In corrispondenza degli estremi della corda b, la tensione tangenziale totale τ_t, anche nel caso in esame, deve risultare tangente al contorno della sezione e quindi i valori della componente τ_{tx} si ottengono ivi dalle ben note relazioni:

$$\tau'_{tx} = \tau_{ty} \operatorname{cotg} \vartheta_1 \qquad \text{e} \qquad \tau''_{tx} = \tau_{ty} \operatorname{cotg} \vartheta_2$$

nelle quali, ϑ_1, ϑ_2, indicano gli angoli che le tangenti al contorno negli estremi della corda formano con la corda stessa.

Negli altri punti di b le equazioni indefinite dell'equilibrio, tenendo conto delle ipotesi fatte per la τ_{ty}, ci danno per la τ_{tx} una legge di variazione diversa dalla lineare, a differenza di quanto avviene per le travi ed anche per gli archi nel caso della sezione simmetrica rispetto al piano contenente l'asse di curvatura [1]).

Riferendoci agli assi x, y e t si può infatti facilmente constatare (studiando l'equilibrio dell'elemento solido compreso tra due superfici coniche generate dalla rotazione di due rette parallele ad y e distanti dx, due altre superfici anch'esse coniche generate dalla rotazione di due rette parallele ad x e distanti dy ed infine tra due piani passanti per r e formanti l'angolo φ) che le equazioni indefinite dell'equilibrio in coordinate cilindriche t, x e y, si modificano come segue:

$$(15)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_t}{\partial t} + \frac{\partial \tau_{tx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{ty}}{\partial y} + \frac{2\tau_{tx} \operatorname{sen} \psi}{r} + \frac{2\tau_{ty} \cos \psi}{r} = \rho \mathcal{F} \\ &\frac{\partial \tau_{tx}}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\tau_{xy} \cos \psi}{r} + \frac{(\sigma_x - \sigma_t) \operatorname{sen} \psi}{r} = \rho \mathcal{U} \\ &\frac{\partial \tau_{ty}}{\partial t} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\tau_{xy} \operatorname{sen} \psi}{r} + \frac{(\sigma_y - \sigma_t) \operatorname{sen} \psi}{r} = \rho \mathcal{V} \end{aligned}$$

avendo indicato con $\mathcal{F}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, le componenti delle forze di massa e con ρ la densità.

Si consideri ora la forma che assumono, nel caso in esame, i vari termini della prima di tali equazioni, indicando con C_1, C_2, C_3, C_1', C_2', opportune funzioni delle sole variabili φ ed y. Si ha in primo luogo:

$$-\frac{\partial \sigma_t}{\partial t} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_t}{\partial \varphi} = \frac{r_0}{r^2} \left[\frac{T_s \cos \psi'}{A^*} - \frac{T_s r^* y_s^*}{I^*_{xx}} \right] = \frac{C_1(\varphi, y)}{r^2}$$

[1]) Cfr. in proposito C. L. Ricci, Op. citata ed inoltre C. L. Ricci, *Rilievi sulla trattazione approssimata delle travi soggette a sforzo di taglio*. Atti della R. Acc. Scienze di Torino, Vol. LXV, 1930.

Per ciò che riguarda la τ_{ty} e la $\frac{\partial \tau_{ty}}{\partial y}$ prendiamo in considerazione separatamente le due ipotesi fatte per il calcolo del valore approssimato della τ_{ty}.

Allorchè si considera τ_{ty} costante lungo ciascuna corda parallela ad x, cioè funzione soltanto di φ ed y si ottiene:

$$-\frac{2\,\tau_{ty}\cos\psi}{r} = \frac{C_3(\varphi, y)}{r} \quad \text{e} \quad -\frac{\partial \tau_{ty}}{\partial y} = C_3(\varphi, y)$$

quando invece, per tutti i punti di una stessa corda si considera costante il prodotto $\tau_{ty} \cdot r$, tenendo presente che:

$$r = r_0 + x \operatorname{sen}\psi + y\cos\psi$$

si deduce:

$$-\frac{\tau_{ty}\cos\psi}{r} = -\frac{(\tau_{ty}\cdot r)}{r^2}\cos\psi = \frac{C_1'(\varphi, y)}{r^2}$$

$$-\frac{\partial \tau_{ty}}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{(\tau_{ty}\cdot r)}{r} = -\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial(\tau_{ty}\cdot r)}{\partial y} + \frac{(\tau_{ty}\cdot r)}{r^2}\cos\psi =$$

$$= \frac{C_2'(\varphi, y)}{r} - \frac{C_1'(\varphi, y)}{r^2}$$

Sostituendo tali valori nella prima delle (15), risulta, rispettivamente in conseguenza delle due ipotesi fatte per la τ_{ty},

per τ_{ty} costante lungo ciascuna corda:

$$\frac{\partial \tau_{tx}}{\partial x} + \frac{2\operatorname{sen}\psi}{r}\tau_{tx} = \frac{C_1(\varphi, y)}{r^2} + \frac{C_2(\varphi, y)}{r} + C_3(\varphi, y)$$

e per $r\,\tau_{ty}$ costante lungo ciascuna corda:

$$\frac{\partial \tau_{tx}}{\partial x} + \frac{2\operatorname{sen}\psi}{r}\tau_{tx} = \frac{C_1(\varphi, y)}{r^2} + \frac{C_2'(\varphi, y)}{r}$$

le quali, se si tien conto che lungo una stessa corda è: $\varphi = \text{cost}$, $y = \text{cost}$ ed r funzione della sola x secondo la relazione:

$$r = (x_0 + x)\operatorname{sen}\psi$$

si trasformano nelle:

$$\frac{\partial \tau_{tx}}{\partial x} + \frac{2}{x_0 + x}\tau_{tx} = \frac{C_1}{\operatorname{sen}^2\psi}\cdot\frac{1}{(x_0+x)^2} + \frac{C_2}{\operatorname{sen}\psi}\cdot\frac{1}{x_0+x} + C_3$$

e

$$\frac{\tau_{tx}}{\partial x} + \frac{2}{x_0 + x}\tau_{tx} = \frac{C_1}{\operatorname{sen}^2\psi}\cdot\frac{1}{(x_0+x)^2} + \frac{C_2'}{\operatorname{sen}\psi}\cdot\frac{1}{x_0+x}\cdot$$

Entrambe tali equazioni, rispetto alla τ_{tx} sono differenziali lineari a coefficienti variabili del tipo:

$$y' + f(x)\, y = f_1(x)$$

a cui corrisponde, come è noto, l'integrale generale;

$$y = e^{-\int f(x)\, dx} \left[C + \int f_1(x)\, e^{\int f(x)\, dx}\, dx \right]$$

Sostituendo i valori di $f(x)$ e di $f_1(x)$ si ha, dopo semplici quadrature ed ovvie riduzioni:
nella prima ipotesi:

$$(16) \qquad \tau_{tx} = \frac{C}{(x_0 + x)^2} + \frac{C_1}{\operatorname{sen}^2 \psi} \cdot \frac{1}{x_0 + x} + \frac{C_2}{2 \operatorname{sen} \psi} + \frac{C_3}{3} (x_0 + x)$$

e nella seconda ipotesi:

$$(16') \qquad \tau_{tx} = \frac{C}{(x_0 + x)^2} + \frac{C_1}{\operatorname{sen}^2 \psi} \cdot \frac{1}{x_0 + x} + \frac{C_2'}{2 \operatorname{sen} \psi}$$

Non occorre nemmeno avvertire che la costante C può essere determinata scrivendo la (16) o la (16') in corrispondenza di uno qualunque dei due estremi della corda, dato che le C_1, C_2... risultano già legate, per le condizioni imposte dal problema, in maniera da dar luogo ad una legge di variazione della τ_{tx} che sia contemporaneamente compatibile con entrambi i valori che essa assume in tali punti. Di tale circostanza si può anzi trarre partito per risparmiare il calcolo diretto di una qualunque delle C_1, C_2..., determinandola unitamente alla costante C, mediante le due equazioni che risultano dalle condizioni note agli estremi della corda.

Un tale procedimento è del resto perfettamente analogo a quello che si adotta per i solidi ad asse rettilineo e per quelli curvi simmetrici rispetto all'asse di curvatura quando nella equazione lineare che ivi si ottiene per la τ_{xx}:

$$\tau_{xx} = C + C_1 x$$

si determinano sia C che C_1, in base alle condizioni agli estremi della corda senza preoccuparsi di seguire il calcolo diretto della C_1; calcolo che non avrebbe altro scopo che quello di una inutile verifica.

Nel caso che qui si considera, conviene calcolare direttamente soltanto la C_1, e, allorchè si adotta la prima ipotesi, anche la C_2, che hanno entrambe una espressione molto semplice, rimandando invece la determinazione delle altre, che riuscirebbe assai laboriosa,

alla risoluzione del sistema di due equazioni lineari nelle C e C_3 ovvero nelle C e C_3' a cui danno luogo le condizioni note agli estremi della corda.

Si ottiene in tal modo il valore della τ_{tx} come funzione di terzo grado della x. Poichè tuttavia tale componente, specie nei punti interni della sezione, costituisce rispetto alla tensione τ_t un contributo molto esiguo, che diviene trascurabile allorchè si passa al calcolo delle tensioni ideali se si tien conto che in generale il taglio è accompagnato da flessione, una legge di variazione lineare per la τ_{tx} potrebbe ritenersi ancora accettabile pure in questo caso nei calcoli tecnici, avuto anche riguardo al fatto che a tale legge tende rapidamente quella più sopra trovata al crescere di r_0 ovvero al diminuire dell'angolo ψ che la corda forma con l'asse di curvatura.

Componendo la τ_{tx} e la τ_{ty} si ottiene il valore della τ_t totale, per uno sforzo di taglio comunque diretto (taglio obliquo). Riteniamo però opportuno di avvertire che, per conseguire una maggiore approssimazione, conviene adottare, anche nel caso da noi esaminato, un criterio, già proposto dal Prof. C. L. Ricci, per il calcolo della τ_z nei solidi ad asse rettilineo soggetto a taglio deviato, mediante il quale si eliminano vari inconvenienti e discordanze ai quali dà luogo la diretta applicazioue della teoria approssimata nei casi di taglio obliquo [1]).

Seguendo tale criterio lo sforzo di taglio T va decomposto nelle sue componenti agenti secondo una coppia di assi privilegiati, costituiti nel nostro caso dagli eventuali assi di simmetria o, in mancanza, dagli assi principali di inerzia della sezione *virtuale* e la τ_t si ottiene quindi in base al principio di sovrapposizione degli stati di equilibrio, come somma geometrica delle tensioni tangenziali dovute ad entrambe le componenti suddette.

Napoli, Laboratorio per lo studio dei Materiali da Costruzione del R. Istituto Superiore di Ingegneria, ottobre 1935 - XIII.

---

[1]) Cfr. C. L. Ricci, *Rilievi sulla trattazione approssimata ecc.*, Op. citata.

Teoria generale di certi indici nei fenomeni statistici (omogamia, endogamia, diffusione etc.)

Nota del socio corrispondente **Giulio Andreoli**

(Adunanza del dì 9 novembre 1935 - XIV)

Sunto. — In nn gruppo di Note — tutte pubblicate in questi Rendiconti (1934; 1935) — ci siamo occupati di definire e studiare indici statistici atti a seguire i fenomeni di omogamia, di attrazione nelle coppie matrimoniali e quelli di ricambio sociale.

Abbiamo ivi indicato come tali indici potessero riguardarsi come casi particolari di una ricerca più vasta: e precisamente quella riguardante il formarsi ed il comportarsi di collettività di coppie (individui di secondo ordine) che si vengono a creare in seno a collettività di individui di primo ordine.

A questa ricerca è dedicato il presente lavoro: osserviamo che non siamo affatto vincolati ad interpretazioni unicamente demografiche, ma che piuttosto ad ogni fenomeno di tipo associativo (economico, ereditario etc.) si può applicare tutto quanto qui è svolto.

Stabiliremo anche, esplicitamente, i legami fra questi indici e quelli di Yule, Benini, Gini (indice quest' ultimo, avente un valore a sè, come vedremo, fondamentule).

§ 1. *Premesse e generalità.*

1. I fatti statistici che prenderemo in esame sono quelli del seguente tipo:

Una certa collettività (A) di elementi statistici, di primo ordine, sia tale che in seno ad essa si formi un' altra collettività (B), associandosi *due* elementi della collettività (A). Queste coppie formeranno gli elementi di secondo ordine i quali compongono la (B).

Limitiamoci, in un primo momento a considerare sugli elementi di (A) dei caratteri allelomorfi creanti una classificazione dicotomica in (A) stessa: ed in corrispondenza ad uno di tali caratteri K, la (A) risulti divisa in (A') ed (A''); mentre in relazione ad un altro carattere scelto $\overline{K}$, la (A) risulti suddivisa in $(\overline{A}')$, $(\overline{A}'')$: ove nella prima classe si pongano gli elementi che presentano il carattere K (e rispettivamente $\overline{K}$), e nella seconda quelli che non lo presentano.

In base a questi criteri, esaminata la collettività (B), essa si presenta suddivisa in quattro classi (derivanti dalla doppia divisione

dicotomica) a seconda che degli elementi di una coppia, uno presenti il carattere K e l'altro il carattere $\overline{K}$, oppure uno il carattere K e l'altro *non* presenti $\overline{K}$, e così via.

È naturale che nel conteggio, se le coppie non risultano ordinate (dai dati stessi del problema) ogni coppia si presenta due volte: considerando cioè l'una o l'altra volta uno degli elementi come primo e l'altro come secondo.

Se viceversa è assegnato un criterio ben definito di ordinamento, ogni coppia viene considerata una sola volta.

Si intende che non è escluso il caso di avere K (carattere allelomorfo della prima divisione) coincidente con $\overline{K}$ (carattere allelomorfo della seconda).

Una immediata e facile estensione (che non dà nulla di sostanzialmente diverso) si presenta subito. Invece di una collettività (A) se ne abbiano due (M) ed (F); alla prima si applichi la divisione dicotomica in base a K, alla seconda quella in base a $\overline{K}$. La collettività di secondo ordine (B) risulti dall'associazione di un elemento (M) con un elemento (F); in tal caso la coppia già risulta ordinata.

Ma, abbiamo detto che questo non porta a niente di nuovo; ed, invero basta considerare la collettività (A) formata da (M) e da (F) distribuire questa in quattro classi, in due modi distinti. Nel primo si considera il carattere allelomorfo di appartenere ad (M) o ad (F), assieme alla presenza o meno di K; avendosi così quattro classi; nel secondo si unisce l'appartenenza ad (M) o (F) con il $\overline{K}$. È ovvio che non vi saranno da considerare associazioni di un (M) con un (M) o di un (F) con un (F): ottenendosi in tal guisa otto dei sedici tipi di coppie sicuramente con numero nullo di elementi. E pertanto tutto si riduce a considerare divisioni non dicotomiche nel caso di partenza.

2. Esempi vari di queste collettività di secondo ordine, si hanno subito.

Si possono considerare coppie matrimoniali; e studiarle in rapporto alla condizione di celibato o di vedovanza preesistenti all'atto del matrimonio oppure studiarle in rapporto all'alfabetismo ed all'analfabetismo; oppure rispetto all'appartenenza o non ad una certa classe sociale. Di parecchi di tali esempi sono state già fatte applicazioni concrete.

Altri casi analoghi sono quelli delle coppie padre-figlio; oppure madre-figlio; oppure fratello-fratello etc. etc. studiate in rapporto a caratteri biologici, sociali, economici, demografici.

Infine altri esempi — che risultano tipicamente economici, possono essere tratti dalla presenza di un vincolo commerciale: e quindi aversi coppie di soci, coppie datore-prestatore d'opera.

Oppure ancora il detto tipo di ricerca statistica può riguardare non più individui ma fatti aziendali: aziende ad attività multiple; aziende consociate fra loro; aziende controllate.

3. Quali sono — tanto per delineare la posizione del problema — i fatti che ci interessano in questo rilevamento statistico?

È ovvio che noi ci dovremo porre il problema di confrontare fra loro due diverse collettività di primo ordine, in seno alle quali si sieno formate collettività di secondo ordine; il confronto può avvenire o confrontando una certa collettività in due periodi di tempo distinti; o due collettività di fatto distinte; oppure l'intensità e le modalità con le quali una certa forma associativa agisce ove si tengano presenti certi caratteri di classificazione, o infine addirittura le modalità di due diverse forme associative.

La creazione di opportuni indici — quelli già indicati nelle Note citate — permette di effettuare tali confronti: poichè gli indici stessi sono costruiti sì da seguire le diverse fasi che accompagnano la formazione di un individuo di secondo ordine e separare così il contributo che le fasi stesse e le cause che le producono, danno al fenomeno statistico rilevato.

Intanto si osservi che tre distinti tipi si possono presentare: anzitutto l'appartenenza ad una coppia può escludere per i suoi componenti l'appartenenza ad un'altra (rapporto matrimoniale); poi può darsi che l'esclusione non valga se non per uno degli appartenenti (rapporto di filiazione: un padre può avere più figli ma non reciprocamente); infine può darsi che l'esclusione non valga per nessuno (rapporto fraterno).

É chiaro che in generale questi rapporti non si presentano isolati; vi saranno dei fenomeni complessi (por i quali valgono certe esclusioni limitate) che sfuggiranno a questa prima analisi; questa però servirà di base.

§ 2. *Le tabelle relative ai fenomeni di osservazione.*

4. Limitandoci, per ora, al caso dicotomico e di coppie ordinate, sia stato effettuato un rilevamento statistico che porti alla tabella « rilevata ».

R_{11}	R_{12}	$\overline{R}'$
R_{21}	R_{22}	$\overline{R}''$
R'	R''	R^*

(T_r)

Con tale tabella noi indichiamo che in seno alla collettività (A) formata di A elementi di primo ordine, si è formata una collettività (R) di elementi di secondo ordine in numero di R^*.

I primi elementi di ciascuna coppia, in base a K, si sono divisi nelle (R'), (R'') ed i secondi elementi, in base a $\overline{K}$, si sono divisi nelle $\overline{R}'$, $\overline{R}''$.

Infine fra le coppie R ve ne sono R_{11} che presentano il carattere K nel primo, e $\overline{K}$ nel secondo elemento; R_{12} che presentano K nel primo e non presentano $\overline{K}$ nel secondo, etc.

Sia v la frequenza con la quale un individuo di primo ordine si presenti come primo elemento nelle coppie: così ad esempio nelle coppie matrimoniali $v = 1$; nelle coppie padre figlio $v =$ prolificità etc.; e siano v' e v'' gli analoghi numeri formati in base alla presenza o meno di K.

Similmente sieno $\overline{v}$; $\overline{v'}$; $\overline{v''}$ le frequenze relative ai secondi elementi delle coppie, complessivamente, rispetto alla presenza o rispetto all'assenza di $\overline{K}$.

5. Siamo adunque, sinora in presenza dei seguenti fatti:

I. La collettività di elementi di primo ordine A, in base a K risulta divisa in A', A''; in base a $\overline{K}$ risulta divisa in $\overline{A}'$, $\overline{A}''$.

II. In seno ad A vi sono B individui, di cui R' col carattere K e R'' senza, che costituiscono i primi elementi di una coppia; ve ne sono $\overline{R}$ (che si dividono in $\overline{R}'$, $\overline{R}''$) costituenti i secondi.

III. Le coppie formate sono in numero di R^*; avendosi pertanto

$$R^* = v\,R = v'\,R' + v''\,R'' \quad ; \quad R = R' + R''$$
$$R^* = \overline{v}\,\overline{R} = \overline{v}'\,\overline{R}' + \overline{v}''\,\overline{R}' \quad ; \quad \overline{R} = \overline{R}' + \overline{R}''$$

Se la formazione degli individui avvenisse semplicemente a caso, e quindi *non* vi fosse una qualunque causa selezionante, allora si dovrebbe avere — invece della tabella rilevata — una tabella « casuale »

C_{11}	C_{12}	$\overline{R}'$
C_{21}	C_{22}	$\overline{R}''$
R'	R''	R^*

(T_c)

ove

$$C_{11} = \frac{v'\,R' \cdot \overline{v}'\,\overline{R}'}{R^*} \quad ; \quad C_{12} = \frac{v''\,R''\,\overline{v}'\,\overline{R}'}{R^*} \quad ; \quad \text{etc.}$$

avendosi sempre

$$C_{11} + C_{12} = \overline{v}\ \overline{R'} \quad ; \quad C_{21} + C_{22} = \overline{v''}\ R''$$
$$C_{11} + C_{21} = v'\ R' \quad ; \quad C_{12} + C_{22} = v''\ R''.$$

Se, più semplicemente ancora non vi fosse un'altra causa selezionante e che fa variare v (o $\overline{v}$) in assenza o in presenza di K (o di $\overline{K}$), e se continuasse ad aversi accoppiamento in modo soltanto casuale, allora si avrebbe una tabella «*spontanea*»:

S_{11}	S_{12}	$\overline{R'}$
S_{21}	S_{22}	$\overline{R''}$
R'	R''	R^*

(T_s)

ove

$$S_{11} = \frac{v\ \overline{v}\ R'\ \overline{R'}}{R^*} \quad \text{etc.}$$

con

$$S_{11} + S_{12} = v\ R' \quad \text{etc.}$$

Tralasciamo di scrivere un'ultima tabella che corrisponderebbe ad una indifferenza nel senso che il carattere K ed il carattere $\overline{K}$ dividano A in due masse eguali, sicchè anche le quattro caselle risultano occupate da eguali numeri.

6. Resta però, fondamentale, un'altra tabella: (questa nei fenomeni matrimoniali corrisponde alla presenza dei gruppi aperti o chiusi, e nei fenomeni riguardante la coppia padre-figlio non si presenta, perchè coincide con quella spontanea.

Detta tabella si delinea allorchè si pensa alla collettività A di partenza: per essa ai numeri R', R'' vanno sostituiti i numeri A', A''; ad $\overline{R'}$, $\overline{R''}$ i numeri $\overline{A'}$, $\overline{A''}$ (o numeri ad essi proporzionali): e si delinea che essa è necessaria proprio in quanto il fatto associativo modifica le distribuzioni.

In altri fenomeni se in una certa collettività valessero gli stessi indici v e $\overline{v}$, se in questa collettività il carattere K (o $\overline{K}$) distribuisse come in A, e se ogni associazione fosse effettuata a caso, si avrebbe la tabella fondamentale

F_{11}	F_{21}	$\overline{F'}$
F_{12}	F_{22}	$\overline{F''}$
F'	F''	R^*

$T_c)$

ove, al solito

$$F'_{ij} = \frac{v\,\overline{v}\,F^j\,\overline{F^i}}{R^*} \quad ; \quad F_{i1} + F_{i2} = vF^i \quad ; \quad F_{1j} + F_{2j} = \overline{vF}$$

avendosi inoltre

$$vF' = \frac{A'}{A} \cdot R^* \qquad ; vF'' = \frac{A''}{A} \cdot R^*$$

$$\overline{vF'} = \frac{\overline{A'}}{A} \cdot R^* \qquad ; \overline{vF''} = \frac{\overline{A''}}{A} \cdot R^*.$$

Si intende subito che noi possiamo ricondurre tutti questi numeri a frequenze: cioè ridurre tutte le masse di collettività rilevate o calcolate ad una massa unitaria.

In tal caso segneremo con lettere greche ed avremo quindi, al posto di A e di R^*, l'unità; al posto di A', A'', $\overline{A'}$, $\overline{A''}$, i rapporti α', α'', $\overline{\alpha'}$, $\overline{\alpha''}$ ottenuti dal quoziente di essi con A; al posto di R', R''; $\overline{R'}$; $\overline{R''}$, i rapporti ρ'. ρ'; $\overline{\rho'}$; $\overline{\rho''}$ con R^*, e quindi le tabelle di frequenze delle $\rho, \gamma, \sigma, \varphi$ formate con quantità a doppio indice.

§ 3. *Il carattere associativo e le operazioni D.*

7. Ottenute così le tabelle che servono di base ai nostri ragionamenti, occorre ritornare al fatto statistico fondamentale. Anzitutto si può abbandonare il criterio di divisione dicotomica. In tal guisa si otterranno tabelle a doppia entrata, nelle quali il carattere K fissa la distribuzione in m classi ed il carattere $\overline{K}$ in n classi, a secondo delle loro rispettive intensità. Tali tabelle non sono, ovviamente, più quadrate ma rettangolari. Intanto, nelle coppie che si sono formate in (A), dando luogo ad (R), si presenta un carattere associativo Ω.

Tale carattere associativo Ω si misuri con un indice di frequenza o di intensità: in altri termini, alle coppie di cui il primo elemento dia al carattere K l'intensità k_i, ed il secondo elemento dia al carattere $\overline{K}$ l'intensità $\overline{k_j}$, a quelle coppie cioè che si presentano situate nella casella situata all'incrocio della i-esima colonna con la j-esima linea ($i = 1, \ldots m$; $j = 1, \ldots n$) sia assegnata l'intensità ω_{ij} del carattere associativo Ω.

Tanto le k_i, come le k_j, come le ω_{ij} varino ad es. da 1, a —1 (presenza totale del carattere, presenza totale del carattere opposto).

Così ad esempio se Ω è il carattere omogamia, corrispondente a una determinata legge, si hanno le $K \equiv \overline{K}$; $m = n$; ed $\omega = 1$ soltanto se $i = j$; $\omega = -1$ se $i \neq j$. Come altro esempio, si ammetta che il carattere K, per semplicità coincidente con $\overline{K}$, sia tale che nella coppia formato il carattere ω sia dato dalla media dei due presenti nella

coppia stessa: allora $\omega_{ij} = \frac{1}{2}(k_i + \overline{k_j})$; oppure ancora che se i caratteri k_i e $\overline{k_j}$ hanno il tipo di probabilità o di frequenza sarà $\omega_{ij} = k_i k_j$.

Con tali considerazioni, a fianco delle tabelle numeriche (con le unità nominate che sono date dalla statistica del fenomeno) e delle tabelle di frequenza ora indicate, si presenta una tabella di distribuzione del carattere Ω; ad ogni casella della distribuzione a doppia entrata è fissato un numero ω_{ij}; valore numerico dell'intensità del carattere associativo.

Attraverso le tabelle T, ridotte a frequenze, e la tabella di Ω, formiamo dei numeri che diano il comportamento complessivo delle tabelle (rilevate o fittizie che siano) rispetto al carattere Ω; che diano, in altre parole, un comportamento *medio* della collettività di secondo ordine rispetto al carattere associativo.

Tale numero, se λ_{ij} rappresentano le frequenze di coppie col carattere associativo ω_{ij}, sarà dato da

$$\sum_{ij} \lambda_{ij}\, \omega_{ij}$$

Esso sarà chiamato « risultato dell'operazione D_ω applicato alla tabella di frequenza Λ.

Si hanno pertanto — da una rilevazione statistica (A) di individui di primo ordine, ed una ad essa relativa (R^*) di individui di secondo ordine, — cinque numeri:

$$D_\omega(R)\ ;\ D_\omega(C)\ ;\ D_\omega(S)\ ;\ D_\omega(F)\ ;\ D_\omega(I)$$

corrispondenti all'applicazione del processo dovuto ad Ω alle tabelle di frequenza rilevata, casuale, spontanea, fondamentale, indifferente.

8. Esaminiamo il comportamento (e ci limitiamo per semplicità di notazioni al caso dicotomico) dei detti numeri, e quindi delle relative tabelle.

Osserviamo le relazioni che intercedono fra le linee e le colonne delle diverse tabelle.

Per la loro stessa formazione, la prima, la seconda, la terza, presentano le stesse somme per orizzontali e per verticali; e questo implica che si passa dalla prima alla seconda e da questa alla terza aggiungendo tabelle numeriche del tipo

$$\begin{vmatrix} s & -s \\ -s & s \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} t & -t \\ -t & t \end{vmatrix}$$

Viceversa dalla terza si passa alla quarta e da questa si passa

alla quinta modificando proprio il numero degli individui costituenti il primo e secondo elemento della coppia, sicchè le variazioni avvengono modificando le somme.

Si è pertanto in presenza di due tipi di cause che permettono di passare dalla prima all' ultima tabella.

Il primo tipo di cause è un fenomeno selettivo che avviene in due tempi (passaggio dalla terza alla quarta; passaggio dalla quarta alla quinta), ed è del tipo dello « sfasamento » già indicato altrove.

Piú precisamente nel passaggio dalla terza alla seconda, lo sfasamento è dovuto al fatto che il numero v — globale è diverso dai due numeri parziali v' e v''; ed analogamente per $\overline{v}$. Quindi si ha un vero e proprio fenomeno attrattivo: cioè per il semplice fatto del formarsi di un' associazione, le classi che si possono associare modificano il contributo che dànno.

Ove questo non si verificasse, terza e seconda tabella risulterebbero identiche.

La differenza fra seconda e prima dà invece col suo annullarsi un vero e proprio fenomeno di permanenza (o se si vuole di attrazione): la seconda è casuale — (come del resto quella spontanea) la prima è la rilevata: dunque il numero s sta ad indicare che la legge di associazione, anche tenendo conto della selezione già avvenuta fra casuale e spontanea, non è più affidata al solo caso ma vi è invece una certa diffusione.

Di tipo diverso è invece il confronto fra quarta e terza; quinta e quarta.

Nella terza le orizzontali e le verticali — sempre ferma restando la formazione a tipo casuale — differiscono nel loro complesso per un certo fenomeno di selezione: selezione che non si verifica più sulle coppie già formate ma sugli elementi che le vanno a formare. Ed infatti mentre la terza presenta le somme per orizzontali e per verticali nella stessa misura che in quella rilevata (la prima), la quarta le presenta proporzionali a quelle che si ottengono dalla collettività originaria di partenza, di individui di primo ordine.

Vi è dunque un fatto selettivo pel quale la semplice possibilità di formare coppia, modifica e sceglie diversamente nelle diverse classi di (A).

Infine la differenza fra quinta e quarta, ove si voglia considerarla, viene a costituire un fatto proprio della collettività (A) nella quale non tutte le classi hanno lo stesso numero di individui; ed anche quì si ha pertanto un fenomeno selettivo proprio della classificazione eseguita.

9. Nell' insieme dunque si hanno quattro differenze che possono

essere raggruppate in due gruppi: da un lato le differenze

$$D_\omega(R) - D_\omega(C) \quad ; \quad D_\omega(C) - D_\omega(S)$$

e la loro somma

$$D_\omega(R) - D_\omega(S) = \{D_\omega(R) - D_\omega(C)\} + \{D_\omega(C) - D_\omega(S)\}$$

che stanno a rappresentare i fenomeni di attrazione che avvengono a coppie già formate.

Dall' altro lato la differenza

$$D_\omega(S) - D_\omega(F)$$

che sta a rappresentare i fenomeni di selezione che avvengono in seno ad (A); e più precisamente per il fatto associativo in sè stesso, diversa distribuzione degli (A).

Infine la differenza

$$D_\omega(R) - D_\omega(F)$$

sta a dare il risultato complessivo delle quattro cause ora dette.

Se si vogliono esaminare più da vicino il comportamento delle quattro differenze, osserviamo che la prima differenza (per quanto abbiamo detto in principio) si riduce a

$$s(\omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{12} - \omega_{21})$$

e la seconda a

$$t(\omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{12} - \omega_{21})$$

e la loro somma a

$$(s + t)(\omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{12} - \omega_{21}).$$

Quindi, esse constano di due fattori: il primo che rappresenta l'intensità dello sfasamento, ed il secondo che rappresenta soltanto una certa combinazione delle intensità: si intende nel caso dicotomico soltanto.

Osserviamo inoltre che le operazioni D_ω *se effettuate su tabelle di frequenza* (cioè ridotte a masse unitarie) sono operazioni del tipo lineare; in altri termini date due qualunque tabelle L ed R, e le relative tabelle di frequenza Λ e Π, ed una operazione D_ω, si avrà la seguente relazione:

$$D_\omega\left(\frac{\Lambda + \Pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\{D_\omega(\Lambda) + D_\omega(\Pi)\}$$

e se invece di aversi tabelle di frequenza si considerano tabelle di

numeri concreti, L, M, si avrà

$$D_\omega(L+M) = \frac{\{L D_\omega(L) + M D_\omega(M)\}}{L+M}$$

il che significa che riunendo due collettività, sottoposte allo stesso criterio di classificazione ed allo stesso carattere associativo Ω, in una sola collettività, si ottiene come risultato dell'operazione D_ω, la media ponderata delle operazioni D_ω effettuate sulle collettività originarie.

Ed è troppo evidente che analoga proposta vale se si opera su una certa collettività con tre diversi criteri associativi, di cui la terza abbia la sua tabella che risulti la somma delle altre due, risulterà

$$D_\gamma(L) = D_\alpha(L) + D_\beta(L).$$

§ 4. *Ulteriore interpretazione delle operazioni D.*

10. Queste ultime proprietà divengono di immediata comprensione, allorchè si interpreta una operazione D come una operazione di media.

Ricordiamo di aver definito, come risultato dell'operazione D_ω, da effettuare su una tabella di frequenza Λ; in base ad un certo carattere associativo Ω il numero

$$\sum \omega_{ij}\, \lambda_{ij};$$

e ricordiamo altresì che le frequenze λ_{ij} si ottengono riducendo la collettività a massa unitaria; per cui

$$\lambda_{ij} = \frac{L_{ij}}{L} \quad ; \quad L = \Sigma L_{ij}$$

Resta dunque:

$$D_\omega(L) = D_\omega(\Lambda) = \frac{\Sigma\, \omega_{ij}\, L_{ij}}{\Sigma\, L_{ij}}$$

Ma le L_{ij} sono sempre tutte positive; le ω_{ij} no; e la formola dianzi scritta interpreta precisamente la D_ω *come la media ponderata delle* ω_{ij} *con i pesi* L_{ij}.

In altri termini, l'operazione D effettuata su una tabella relativa ad una certa collettività, in base alla tabella delle ω *(che dànno i valori quantitativi connessi al carattere associativo* Ω*) dà precisamente il valore medio di tale carattere formato per tutta la collettività in esame.*

Quindi, con i procedimenti da noi indicati, ed ottenuti con le

cinque tabelle, si hanno precisamente cinque valori medi di tale carattere; quello relativo all'effettivo rilevamento; quello relativo alle coppie, se si formassero a caso, fra gli elementi primi e secondi con la multiplicità e la frequenza che effettivamente hanno; quello relativo a coppie, formate casualmente con multiplicità media e con la frequenza effettiva; quello relativo a coppie, formate a caso con multiplicità media di elementi e con frequenza di questi eguale a quella della collettività di primo ordine; ed infine quello relativo a coppie formate a caso, con multiplicità media e con frequenza anch'essa media.

11. È logico ammettere dunque, in primo esame, le differenze di questi valori medi come indici atti a misurare il fenomeno associativo; e questo in relazione a quanto abbiamo già trattato nelle già citate note nei casi particolari. Ma, visto che si tratta di media, si possono presentare (e noi accenniamo soltanto alla possibilità) ulteriori definizioni.

Così potremo parlare di operazioni D di secondo grado, di terzo etc., scegliendo non più formazioni baricentriche ma quelle dei momenti: cioè

$$\sqrt{\frac{\Sigma\, \omega^2_{ij}\, L_{ij}}{\Sigma\, L_{ij}}} \; ; \; \sqrt[3]{\frac{\Sigma\, \omega^3_{ij}\, L_{ij}}{\Sigma\, L_{ij}}} \; ; \ldots ;$$

potremo, a fianco di ogni operazione D effettuata su una tabella considerare lo scarto quadratico medio, attraverso le formule

$$\sqrt{\frac{\Sigma\, \omega_{ij} - \delta_1)^2\, L_{ij}}{\Sigma\, L_{ij}}}$$

ove per semplicità si ponga

$$D_\omega (L) = \delta$$

e così via.

§ 5. *Confronti degli indici costanti con quelli di* Benini, Gini, Yule.

1. A logico complemento della nostra ricerca occorre mettere in relazione i nostri indici con quelli già introdotti dai nominati autori.

Premettiamo che per questi si presenta il caso di classificazione dicotomica; e che per ottenere un raffronto completo occorrerebbe svilupparli ed estenderli al caso di classificazioni non dicotomiche. D'altro canto per la loro stessa costruzione essi non dànno (come invece abbiamo visto delineate per i nostri) un valor medio di un carattere associativo esteso alla collettività di individui di secondo ordine.

Risulterà, da quanto segue, che gli indici dei citati Autori si possono esprimere in funzione degli indici da noi introdotti: questi segnano — in certo modo — fatti elementari che avvengono nel passaggio a forme associative sempre più complesse (dalla indifferente o fondamentale, a quella spontanea, a quella casuale, a quella rilevata), e pertanto il risultato stesso è da attendersi. Le formule ottenute permetteranno di estendere gli indici anche a divisioni non dicotomiche.

Gli indici definiti sono applicati solo per quei casi nei quali un individuo può entrare a far parte di una sola coppia; inoltre essi non tengono presente la selezione che avviene in seno alla collettività di primo ordine per il fatto associativo atto a produrre gli individui di secondo ordine.

In altri termini — per riferirci al caso matrimoniale — non vengono esplicitamente prese in considerazione le proporzioni fra le classi esaminate di maschi o di femine che esistono nella popolazione, in confronto di quelle (generalmente diverse, sia pure in misura minima nel caso in esame) che si presentano considerando le classi analoghe di maschi o di femine presenti nelle coppie matrimoniali.

Vi è da considerare perciò soltanto la tabella rilevata, quella casuale, quella indipendente (e riferirsi quindi alla nostra Nota: « *Sulla definizione di certi indici, relativi a caratteri di omogamia, in problemi statici* ». Rend. R. Acc. Sc. fis. e Mat. Napoli Serie 4.ª Vol. IV 1934 XII).

Con le notazioni qui adottate, noi ci riferiremo *sempre* a tabelle già ridotte a frequenze, frazioni dell'unità, essendo perciò l'unità stessa il numero totale delle coppie esaminate. Ricostruendo dette tabelle e tenuta presente la ora citata Nota si ha:

Tabella rilevata (T_r)

r_{11}	r_{12}	m_1
r_{21}	r_{22}	m_2
f_1	f_2	1

ove $r_{11}+r_{12}=m_1$; $r_{11}+r_{21}=f_1$

$r_{21}+r_{22}=m_2$; $r_{12}+r_{22}=f_2$

$f_1+f_2=1$

Tabella casuale (T_c)

c_{11}	c_{12}	m_1
c_{21}	c_{22}	m_2
f_1	f_2	1

ove $c_{ij}=m_i f_j$

Tabella indifferente (T_i)

$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Dalla già citata Nota risulta poi, come è evidente,

$$r_{11} = c_{11} + p \; ; \; r_{12} = c_{12} - p \; ; \; r_{21} = c_{21} - p \; ; \; r_{22} = c_{22} + p.$$

Applicando l'operazione D fatta col quadro

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

alla differenza $T_r - T_c$, ciò che equivale per la linearità a formare la differenza fra D applicata a T_r e D applicata a T_c, è precisamente $4p$ che dà l'*indice di sfasamento*, σ da noi introdotto ivi.

In modo analogo, potendosi porre: $m_1 = \frac{1}{2} + h; m_2 = \frac{1}{2} - h; f_1 = \frac{1}{2} + k;$ $f_2 = \frac{1}{2} - k$ (con $|h|, |k|$ minore di l); come risultato dell'operazione D applicato a T_c, si avrà:

$$c_{11} + c_{22} - c_{12} - c_{21} = \left(\frac{1}{2} + h\right)\left(\frac{1}{2} + k\right) + \left(\frac{1}{2} - k\right)\left(\frac{1}{2} - k\right) - \\ - \left(\frac{1}{2} + h\right)\left(\frac{1}{2} - k\right) - \left(\frac{1}{2} - h\right)\left(\frac{1}{2} + k\right)$$

ovvero

$$D(T_c - T_i) = DT_c - DT_i = 4hk - 0 = 4hk.$$

Questo è l'« *indice di irregolarità* j » da noi introdotto. Risulta poi evidente che

$$r_{11} = \left(\frac{1}{2} + h\right)\left(\frac{1}{2} + k\right) + p$$

$$r_{12} = \left(\frac{1}{2} + h\right)\left(\frac{1}{2} - k\right) - p$$

$$r_{21} = \left(\frac{1}{2} - h\right)\left(\frac{1}{2} + k\right) - p$$

$$r_{22} = \left(\frac{1}{2} - h\right)\left(\frac{1}{2} - k\right) + p$$

Prima di passare ad esaminare gli indici di Benini, Yule, Gini, introduciamo la quantità π^2 definita da

$$\pi^2 = m_1 m_2 f_1 f_2 = \left(\frac{1}{2}+h\right)\left(\frac{1}{2}-h\right)\left(\frac{1}{2}+k\right)\left(\frac{1}{2}-k\right) =$$
$$= \left(\frac{1}{4}-h^2\right)\left(\frac{1}{4}-k^2\right) = \frac{1}{16} - \frac{1}{4}(h^2+k^2) + h^2 k^2,$$

che si può anche scrivere ovviamente:

$$\frac{1}{16}[1-(m_1-m_2)^2-(f_1-f_2)^2+j^2].$$

Si osservi che π varia fra 0 ed $\frac{1}{4}$, come si vede da

$$\pi^2 = \left(\frac{1}{4}-h^2\right)\left(\frac{1}{4}-k^2\right).$$

2. Seguendo il Savorgnan (loc. citato), cominceremo dall'esprimere il *coefficiente Q di associazione* di Yule; servendoci delle notazioni qui adottate

$$Q = \frac{r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21}}{r_{11}r_{22} + r_{12}r_{21}}$$

cioè:

$$= \frac{(c_{11}+p)(c_{22}+p)-(c_{12}-p)(c_{22}-p)}{(c_{11}+p)(c_{22}+p)+(c_{12}-p)(c_{22}-p)} = \frac{(c_{11}c_{22}-c_{12}c_{22})+p(c_{11}+c_{22}+c_{12}+c_{21})}{(c_{11}c_{22}+c_{12}c_{21})+p(c_{12}+c_{22}-c_{12}-c_{21})+2p^2}.$$

E poichè le c_{ij} si esprimono come $m_i f_j$, sarà da un lato:

$$c_{11}c_{21} = c_{12}c_{21} = \pi^2,$$

sicchè:

$$c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = 0 \quad ; \quad c_{11}c_{22} + c_{12}c_{21} = 2\pi^2;$$

dall'altro lato;

$$c_{11} + c_{22} + c_{12} + c_{21} = 1$$
$$c_{11} + c_{22} - c_{12} - c_{21} = j$$

il che porta a:

$$Q = \frac{p}{2\pi^2 + pj + 2p^2},$$

ed essendo infine $p = \frac{\sigma}{4}$ sarà:

$$Q = \frac{2\sigma}{16\pi^2 + 2\sigma j + \sigma^2}.$$

Similmente si può trattare il *coefficiente di collegamento di* YULE; esso risulta dato da

$$\omega = \frac{1 - \sqrt{\frac{r_{12}\, r_{21}}{r_{11}\, r_{22}}}}{1 + \sqrt{\frac{r_{12}\, r_{21}}{r_{11}\, r_{22}}}} = \frac{\sqrt{r_{11}\, r_{22}} - \sqrt{r_{12}\, r_{21}}}{\sqrt{r_{11}\, r_{22}} + \sqrt{r_{12}\, r_{21}}} = \frac{(\sqrt{r_{11}\, r_{22}} - \sqrt{r_{12}\, r_{21}})(\sqrt{r_{11}\, r_{22}} + \sqrt{r_{12}\, r_{21}})}{(\sqrt{r_{11}\, r_{22}} + \sqrt{r_{12}\, r_{21}})^2}$$

Fatte le riduzioni, esso risulterà dato da

$$\omega = \frac{r_{11}\, r_{22} - r_{12}\, r_{21}}{r_{11}\, r_{22} + r_{12}\, r_{21} + 2\sqrt{r_{11}\, r_{12}\, r_{21}\, r_{22}}}$$

Un ragionamento analogo a quello svolto prima conduce a:

$$\omega = \frac{p}{2\pi^2 + pj + 2p^2 + \sqrt{\left(\pi^2 + \frac{pj}{2} + p^2\right)^2 - \frac{p^2}{4}}}$$

ovvero ad

$$\omega = \sigma \frac{Q}{1 + \frac{1}{2}\sqrt{1 - Q^2}}$$

3. Passiamo adesso agli indici di GINI. Si ricava tale *indice di rassomiglianza s*, dalla formola

$$s = \sqrt{P_1 P_2} \qquad \text{essendo}$$

$$P_1 = \frac{r_{11}}{r_{11} + r_{21}} - \frac{r_{12}}{r_{12} + r_{22}} \quad ; \quad P_2 = \frac{r_{11}}{r_{11} + r_{12}} - \frac{r_{21}}{r_{21} + r_{22}}$$

Con le solite trasformazioni

$$P_1 = \frac{c_{11} + p}{(c_{11} + p) + (c_{21} - p)} - \frac{c_{12} - p}{(c_{12} - p) + (e_{22} + p)} \quad ; \quad P_2 = \frac{c_{11} + p}{(c_{11} + p) + (c_{12} - p)} - \frac{c_{21} - p}{(c_{21} - p) + (c$$

Ora:

$$c_{11} + c_{21} = f_1 = \frac{1}{2} + k \; ; \; c_{12} + c_{22} = \frac{1}{2} - k = f_2 \; ; \; c_{11} + c_{12} = m_1 = \frac{1}{2} + h \; ; \; c_{21} + c_{12} = m_2 = \frac{1}{2}$$

e si avrà — con le altre relazioni — fra le c e le f, m, la formula

$$P_1 = \frac{f_1 m_1 + p}{f_1} - \frac{f_2 m_1 - p}{f_2} = \frac{p}{f_1} - \frac{p}{f_2} = \frac{p\,(f_2 - f_1)}{f_1 f_2} = \frac{-2pk}{f_1 f_2}$$

e l'altra analoga

$$P_2 = \frac{-2\,p\,h}{m_1\,m_2}.$$

Dunque, l'*indice di rassomiglianza* di GINI è dato da:

$$s = \sqrt{P_1\,P_2} = \sqrt{\frac{4\,p^2\,h\,k}{m_1\,m_2\,f_1\,f_2}},$$

che può scriversi, ove si tenga presente j e σ,

$$s = \frac{\sigma\sqrt{|j|}}{4\,\pi},$$

Da quanto precede si vede che a π *può essere sostituito dovunque s, attraverso la relazione:*

$$\pi = \frac{\sigma}{4\,s}\sqrt{j}$$

ed in tal modo, il coefficiente di associazione di YULE *risulta dato da*

$$Q = \frac{2\,s^2}{\sigma j + 2\,s^2 j + \sigma}$$

Resta dunque il fatto che:

Nel caso di divisione dicotomica, per mezzo degli indici da noi assegnati e di quello del GINI, *si riescono ad esprimere tutti gli altri; questi esprimono pertanto fatti complessi, mentre quegli altri esprimono dei fatti elementari.*

In quanto all'indice I di attrazione del BENINI, vi sono calcoli del tutto analoghi, ma operanti sul gruppo aperto e su quello chiuso che compongono un gruppo assegnato in esame, che possono dare:

$$I_t = \frac{\sigma_t}{\lambda_a(1-j_c)+j_c-j_t} = \frac{\sigma_t}{(1-j_t)-\lambda_c(1-j_c)}$$

essendo σ_t l'indice di sfasamento del totale, j_t e j_c l'irregolarità sul gruppo totale e su quello chiuso, $\lambda\,\lambda_c$ il rapporto fra matrimoni del gruppo aperto (o del chiuso) e quello totale.

Trovate le espressioni di Q, ω, s in funzione di s, j, π, poichè questi ultimi riescono definiti anche per divisioni non dicotomiche e per quadri diversi da quelli con i caratteri $+1$, -1(a tipo omogamico) restano altrèsì estesi detti Q, ω, s a tutti i possibili casi da noi indicati.

§ 6. *Conclusione*

13. La conclusione che possiamo trarre da quanto precede è che siamo effettivamente in possesso di un metodo statistico atto a studiare un qualunque fenomeno associativo ed a confrontare le modalità col quale esso si svolge in due diverse collettività.

Tale metodo si basa su due capisaldi:

I. La formazione, a partire dalla tabella rilevata, di tabelle via via più semplici le quali lasciano successivamente cadere una modalttà del fenomeno complesso, sino a ridursi ad una uniformità statica; e queste tabelle sono la « *rilevata* », la « *casuale* », la « *spontanea* », la « *fondamentale* », la « *indifferente* ».

II. L'assegnazione di un valore numerico alle modalità di un carattere associativo nascente — per gli individui di secondo ordine — dalla presenza di certe modalità di un altro assegnato carattere nel primo elemento, e di un altro carattere nel secondo elemento di una coppia; tale assegnazione equivale alla formazione di una certa tabella delle ω.

Su tali capisaldi, la definizione di indici atti a seguire il fenomeno associativo richiede:

1.°) La formazione di un valor medio del carattere associativo per le singole tabelle ora dette, in base a quella dei valori numerici assegnati alle modalità del carattere stesso: tale formazione si ottiene ponderando i valori del carattere col numero degli individui di secondo ordine (effettivi per la tabella rilevata, fittizio per le altre) che presentano la stessa modalità: questa è l'operazione D.

2.ª) La formazione delle differenze fra i successivi valori D ottenuti per le tabelle anzidette.

3.°) Gli ulteriori complementi che possono spettare ad una qualsiasi formazione di media.

I giacimenti silexitici di Davoli e Satriano [1]) in prov. di Catanzaro

Nota dell' ing. **Giuseppe Ronza**

(presentata dal socio ord. G. D'Erasmo nell' adunanza del dì 7 dicembre 1935 - XIV)

Sunto. — L' Autore segnala l' esistenza di plaghe silexitiche intercluse fra le pegmatiti e le rocce quarzodioritiche dei territori di Davoli e Satriano, sul versante ionico delle Serre settentrionali in Calabria.

Interpetra i giacimenti come il termine estremo della differenziazione acida del magma, probabilmente già endomorfizzato, cui si ricollegano le rocce massicce (da quarzodioriti-granodioriti-graniti a plagioclasio fino a pegmatite) della zona.

In tali schizoliti acide in un secondo tempo le sollecitazioni tettoniche indussero la struttura cataclastica, che rende agevole il lavoro di abbattimento del minerale.

Queste condizioni di struttura, insieme a quelle di giacitura ed all' alto grado di purezza del minerale, lo rendono di notevole interesse industriale (materia prima per la fabbricazione di cristalli, ceramiche, vetri e refrattari).

L' A. descrive inoltre una grande massa di minerale già messa in vista per circa 500.000 tonnellate (in località Leggio) ed esamina sommariamente gli impianti relativi già in opera o da sistemarsi per l'abbattimento, trasporto e preparazione dei prodotti.

I) *Premessa.* — Nei territori dei Comuni di Davoli e Satriano (in provincia di Catanzaro), sulle ultime propaggini ioniche delle Serre (Serra S. Bruno-Serralta S. Vito) in questi ultimi decenni alcune fra le numerose frane, che sventuratamente infestano quei luoghi, hanno messo in vista mano mano vari affioramenti di un sabbione cataclastico quarzoso, il quale, per purezza e facili condizioni di abbattibilità (derivanti queste ultime dallo stato incoerente in cui si trova), assume notevole interesse industriale.

Soltanto le aspre condizioni topografiche della regione hanno impedito finora di valorizzare adeguatamente i giacimenti relativi, i quali certamente faranno risentire la loro influenza sul mercato delle silici.

---

[1]) L' esistenza dei giacimenti e la loro importanza industriale furono segnalate dall' A. in occasione del VII Congresso Internazionale di Miniere, Metallurgia e Geologia Applicata, tenutosi a Parigi nei giorni 20-26 ottobre 1935.

Mette perciò conto di riferire su quanto in proposito ebbi a rilevare nella visita, che feci della località nel mese di aprile c. a., e con lo studio dei materiali vari appositamente prelevati.

Le condizioni stesse che hanno provocato gli affioramenti del minerale spiegano come fino a pochi anni addietro non si sia sentito parlare di esso, nonostante le premurose ricerche che da oltre un secolo si sono intensificate in Calabria per rinvenire della soddisfacente sabbia silicea.

Non ne parla infatti il Cortese nella sua descrizione geologica della Calabria [1]), nè nella sua memoria sulle risorse litoidi della provincia di Catanzaro [2]).

Le prime notizie e con esse la segnalazione della loro importanza davo nel 1928 in una relazione al Ministero dell'Economia Nazionale, redatta a proposito dei materiali cosidetti « caolinici » che si riscontrano nelle stesse località.

Notizia dei giacimenti e principalmente della bontà del materiale dà il Misefari [3]), il quale si è dedicato da qualche anno a valorizzare i giacimenti, affrontando e risolvendo anzitutto il problema dei trasporti mercè l'impianto di una teleferica, di cui si dirà.

Un breve cenno ne dà recentemente il Penta [4]) nella sua raccolta sulle risorse litoidi dell'Italia Meridionale.

II) *I giacimenti.* – La plaga (vedi cartina d'insieme), ove si riscontrano i giacimenti quarziferi, è ubicata nei territori di Davoli e di Satriano e si estende dalla contrada Trona, sita a N-W di Davoli,

---

[1]) Cortese E., *Descrizione geologica della Calabria.* Mem. descr. d. Carta Geol. d'Italia, vol. IX. Roma, 1895, e Ristampa: Firenze, Tipografia Mariano Ricci, 1934 (XII).

[2]) Cortese E., *Materie minerali utili in Provincia di Catanzaro.* A cura dell'Amm. provinciale di Catanzaro. Stab. Tip. « La Giovine Calabria ». Catanzaro, 1923.

[3]) Misefari B., *Il quarzo italiano e le sue applicazioni.* Comunicazione detta al Congresso dell'Ass. ottica it. nella R. Università di Firenze. « Stirpe » n. 8 agosto 1934. Roma, Tip. Saturnia, 1934.

— *Impresa sfruttamento silici italiane. Dott. Ing. Bruno Misefari — Davoli (Catanzaro).* In « II Mostra Nazionale di strumenti ottici », pagg. 42-44. Firenze, XX maggio-I luglio 1934.

Nella prima di queste memorie il Misefari riporta le conclusioni cui arriva il Cortese, appositamente recatosi allora sui luoghi e che valuta a circa 700,000 tonn. il minerale utile del vallone Leggio.

[4]) Penta F., *I materiali da costruzioni dell'Italia Meridionale.* Fondazione Politecnica — Napoli, 1935 - XIII.

nelle valli dell' Ancinaletto e del suo affluente « Piccolo Fiume », fino all' Ancinale. In effetti le masse di minerale messe in vista dai lavori eseguiti o identificabili negli affioramenti superficiali si trovano lungo i declivi del vallone « *Leggio* », che sbocca nell' Ancinaletto, e nelle località: « *Trona* », (a circa 500 m. in linea d' aria a Sud di Leggio); « *Farragine* », (lungo un vallone confluente con l' Ancinaletto); « *Piccolo Fiume* », (alla confluenza del rivo omonimo con l' Ancinaletto); « *Mulino* », « *Pesce* », sull' Ancinaletto, alle falde settentrionali del Vinciale e finalmente sull' opposto versante della vallata, lungo l' erto poggio, su cui sorge l' abitato di Satriano.

Altri indizi si notano altresì a Nord di questo abitato, nel basso corso dell' Ancinale.

La zona interessata abbraccia così una superficie di qualche km².

L' ossatura fondamentale della zona stessa, coperta da una coltre di materiali incoerenti (in genere sabbione di disfacimento delle masse cristalline sottostanti), è costituita dai cosidetti « graniti del tipo della Serra ».

I materiali così denominati sono caratterizzati dal loro stato di profondo disfacimento, che li rende sempre meno coerenti man mano che si procede verso la superficie; in effetti però essi nella plaga indiziata ed in esame costituiscono delle « *Rocce quarzodioritiche* » [1]), varianti da *quarzodioriti* a *granodioriti*, e passanti a *Rocce graniticche*, sempre però con sensibile contenuto di plagioclasio acido.

Queste plutoniti mantengono una grana grossa e sono qui caratterizzate, si può dire costantemente, dalla presenza macroscopica di muscovite, talora abbondantissima ed in grossi cristalli; la presenza di tale minerale, mentre concorre efficacemente alla facile e rapida alterabilità superficiale delle formazioni, induce anche a pensare che importanti processi endomorfici siano intervenuti nel consolidamento e nella differenziazione del magma originario.

In vari punti queste rocce passano allo stato pegmatitico.

Si notano infatti delle pegmatiti tipiche granitiche (circa 50% di Quarzo e 50% di Ortoclasio), affioranti in contrada Leggio (sul versante sinistro della vallata verso il contatto col quarzo), e delle pegmatiti grafiche (a microclino e plagioclasio alterati, quarzo e muscovite con poca biotite alterata) affioranti nella stessa località a monte, però, della mulattiera.

Fra queste rocce affiorano le masse quarzose, ciascuna delle quali,

---

[1]) Per la nomenclatura qui seguita v.: Niggli P., *Die quantitative mineralogische Klassification der Eruptivgesteine* Schweiz. Min. u. Petr. Mitt. — B. XI, H. 2 — Zürich, 1931.

anche dove i lavori di esplorazione eseguiti finora non ne abbiano messe in vista le caratteristiche di potenzialità e giacitura, si presenta nelle varie zone con evidente continuità.

Il più interessante accumulo di minerale è quello ubicato nel val-

CARTINA DELLA PLAGA A SILEXITI DI DAVOLI E SATRIANO
dal foglio al 25.000 dell'Istituto Geografico Militare
L'equidistanza delle curve è di metri 10
Gli affioramenti di silexite sono indicati con cerchietti

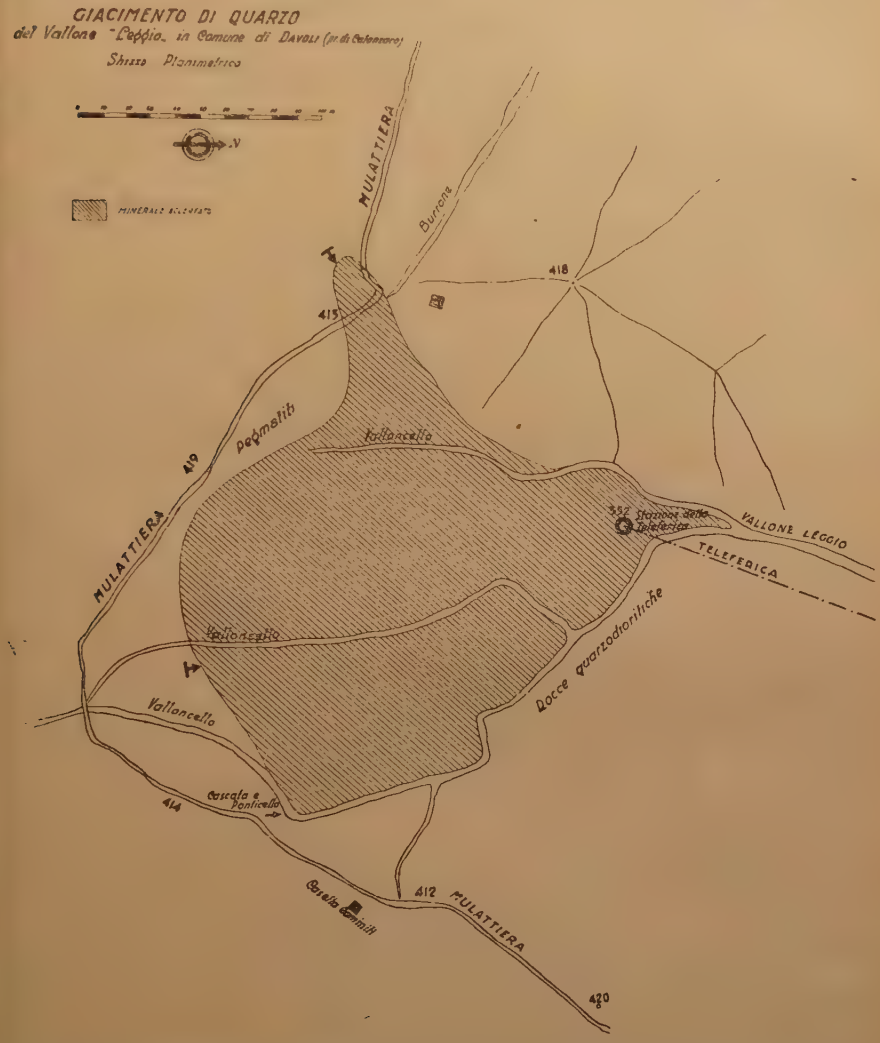
lone « *Leggio* », che degrada dalla mulattiera a quota 415, posta a N-E di Davoli in località « Trona » e « Marcuccio », sino alla vallata dell'Ancinaletto (vedi lo schizzo planimetrico).

Il minerale è quivi contenuto in un'ampia conca a contorno triangolare, limitata a Sud dalla mulattiera (quota 415) ed agli altri lati da due rigagnoli confluenti a q. 330.

In questa si estende quasi con continuità un'importante massa di quarzo, ove si sono svolti i lavori di esplorazione e preparazione.

Mentre nella zona sud-occidentale affiorano importanti formazioni pegmatitiche (immergentisi verso N-E, al muro del giacimento, con

una direzione da N-W a S-E), viceversa nel bordo opposto affiorano, con un contatto non ben definito rispetto alla massa di quarzo, vari spuntoni di Rocce quarzodioritiche; queste rocce si riscontrano inti-



mamente disaggregate e quindi in gran parte asportate da frane e slittamenti [1]). Identiche rocce trovansi a tetto del giacimento o intercalate con questo. Le suddette pegmatiti perciò sembrerebbero segnare il bordo sud-occidentale della plaga, entro cui sono contenute le masse quarzose.

---

[1]) Una frana si è verificata anche durante i lavori di preparazione, colmando una trincea aperta verso il contatto.

I lavori già eseguiti in vallone Leggio mostrano una potenza media di almeno m. 8 con un massimo accertato di m. 10.

Il minerale si presenta sui fronti di taglio come una massa bianca costituita da minutissimi frammenti a spigoli vivi giustaposti fra loro e tenuti in sede per mutuo contrasto, per modo che, mentre la massa tutta conserva un aspetto di roccia consistente, viceversa poi basta un colpo di piccone per provocarne lo scoscendimento in cumuli di detriti piccolissimi (da meno di 1 mm. a qualche cm.).

Il minerale presenta verso tetto una o più intercalazioni stratiformi (della potenza da qualche cm. ad 1 m.) di roccia quarzodioritica alterata ed anche essa minutamente disgregata; in ogni caso facilmente separabile dalla materia utile anche in sede di abbattimento. Oltre le suddette intercalazioni va ancora notata (nella parte meridionale del giacimento) uno spuntone dello stesso quarzo di circa cm. 30 di potenza e ad andamento verticale, il quale, (con direzione N-S) pare attraversi la massa tutta; ma non presenta gli effetti di cataclasi, diffusi in questa.

Più a Nord è venuta a giorno una profonda frattura nella massa quarzosa parallela al dicco, di cui sopra, con bordi distanti da 10-15 cm., riempita da un materiale pulverulento, aggregato in parte fino a simulare una certa plasticità, e che è costituito quasi esclusivamente da quarzo: trattasi di una frattura riempita da materiale dilavato dalle zone circostanti.

Come pure va segnalato che in qualche caso sulla superficie dei frammenti di quarzo si riscontrano delle esilissime incrostazioni nerastre costituite da ossidi metallici prevalentemente ferro-manganesiferi.

Si tratta però di fenomeno raro, superficiale e sempre localizzato; ed in nessun caso esso incide la massa dei singoli detriti.

Vanno ricordate inoltre delle minuscole puntiformi macchie giallastre, che si riscontrano su zone dei fronti e sui cumuli di materiale abbattuto; sulla natura di queste macchie metterebbe conto di indagare.

I lavori eseguiti finora permettono di ritenere, che su 30.000 mq., superficie del vallone Leggio compresa fra il rigagnolo, che ne delimita il fondo verso Est (fino alla sua confluenza con l'altro rigagnolo, che scorre lungo l'estremo Ovest della valle), il crinale, che separa il vallone stesso da quello di Farraggine, e la mulattiera che attraversa a mezza costa la valle, l'80 % (vedi cartina) e cioè circa 24.000 mq. è attribuibile alla parte di giacimento, messa in vista e che può con sicura attendibilità essere oggetto di cubatura.

Per quanto riguardi la sua potenza, è da tenere presente che il giacimento si estende in verticale anche oltre i piedi di fronte nei

tratti ove è inciso dagli scavi, perchè, se così non fosse, dovrebbe osservarsi a piede fronte stesso il materiale sterile di base.

Quindi, anche se si voglia tenere conto delle intercalazioni di sterile che lo attraversano, si può fare assegnamento su uno spessore medio utile ai fini estrattivi di almeno m. 8, il che porta la cubatura in esame a mc. 192.000,00, cui corrisponde una consistenza del giacimento Leggio di circa 500.000 tonnellate.

La suddetta cubatura si riferisce, è bene notarlo, a minerale messo in vista, mentre per il minerale probabile valgono le osservazioni che si andranno esponendo a proposito degli indizi riscontrati nelle altre località.

Nelle altre località indiziate si riscontra:

1.°) In contrada Trona, un dicco di quarzo incassato nelle rocce quarzodioritiche, avente pendenza verso N-E ed orientato in prosecuzione dell'accumulo del Leggio (ed a m. 500 in linea d'aria da esso). Trattasi però di materiale non cataclastico.

2.°) In contrada Farraggine numerosi affioramenti sono visibili nel Vallone che confluisce con l'Ancinaletto. Quivi le rocce di copertura del minerale quarzoso, sono in istato franoso per un vasto slittamento verificatosi lungo il contatto. Si può desumere, dall'entità delle frane, una notevole estensione della superficie di contatto e quindi del sottostante giacimento.

3.°) Dubbia invece appare la consistenza delle masse affioranti in contrada Mulino, ove a contatto con la quarzodiorite di sponda affiora uno spuntone di quarzo non cataclastico, che costituisce così una brusca strozzatura del corso del fiume.

4.°) Molto interesse offrono più a valle gli indizi che si riscontrano in contrada Pesce, ove la zona, molto sconvolta e tormentata da frane, mostra numerosi affioramenti di quarzo in granuli a spigoli vivi sia sciolti che ancora giustaposti fra loro.

Tenuto presente che la massa quarzosa si estende sia in direzione che in pendenza per qualche centinaio di metri, se ne può desumere la importanza, tenendo conto che la potenza supera certamente il metro.

5.°) Nessun giudizio si può formulare, allo stato, sulla importanza degli affioramenti esistenti alle falde del colle di Satriano, sia nel versante dell'Ancinaletto, che in quello opposto dell'Ancinale.

Alla stregua degli elementi sovraesposti e dei dati di osservazione desumibili dagli affioramenti, le masse quarzose andrebbero ascritte ad un sistema di dicchi ad andamento presso a poco parallelo, con immersione a Nord, distribuiti entro un'area romboidale, le cui diagonali di circa 1 km. ciascuna sono dirette rispettivamente N-S ed E-W.

Tali masse sono interessate da fratture ad esse perpendicolari, riempite dallo stesso materiale; ma di origine superficiale.

Giova tuttavia aggiungere che, allo stato attuale delle conoscenze, nulla autorizza ad escludere che i vari affioramenti possano essere collegati fra loro anche superficialmente.

Su alcuni campioni di questo materiale furono eseguite delle analisi chimiche dal REBUFFAT O. e dal Laboratorio della *Tonindustrie* di Berlino, i cui risultati, che qui riporto, furono pubblicati nella *Relazione della II Mostra Nazionale di strumenti ottici* (già avanti cennata):

	Analisi del REBUFFAT	Analisi del Laboratorio della « *Tonindustrie* »
Perdita alla calcinaz.	0,40	0,28
SiO_2	99,10	99,28
Residui in solfati	0,41	0,55
$Al_2O_3 + Fe_2O_3$	—	0,009
CaO	—	
MgO	—	—
TiO_2	—	—
Alcali	—	—

I risultati di tali analisi sono completamente confermati dall'esame macroscopico e microscopico (questo ultimo su preparati di « polvere » e su sezioni sottili) dei numerosi campioni del minerale prelevati da più punti della cava Leggio e da tutti gli altri affioramenti.

Trattasi cioè, escluse le poche intercalazioni di sterile e le altre singolarità avanti cennate, di quarzo ad individui originariamente grossi, concresciuti da una soluzione ignea, ma, per dislocazioni subite, ridotti poi in detriti di grandezza variabile da pochi micron a qualche cm.

Al microscopio i detriti del minerale si presentano più o meno velati, ma insistendo nella polverizzazione dei detriti o ricorrendo alle sezioni sottili si osserva agevolmente che il minerale è scevro da impurità inglobate nei o fra i cristalii e che la velatura dei detriti è dovuta ad irregolarità delle loro superfici ed a polvere minutissima depositata nelle anfrattuosità di esse.

In complesso l'esame dei campioni in uno con le considerazioni già esposte sulla giacitura permettono concludere che:

i giacimenti quarzosi in esame sono costituiti da *silexite*, vale

a dire da una roccia ignea intrusiva a base di solo quarzo e con assenza sia di minerali femici, che di feldspati;

che tale roccia posteriormente al suo consolidamento fu soggetta ad intense sollecitazioni tettoniche, le quali ne determinarono l'intima disgregazione fino a conferirle l'aspetto detritico e spesso sabbioso, che oggi si osserva.

Gli affioramenti elencati e con essi la massa quarzosa già messa in vista con i lavori di ricerche e preparazione del vallone Leggio costituiscono dunque le manifestazioni estreme di un processo completo di differenziazione acida del magma (probabilmente già in origine differenziato per endomorfismo), cui si devono le formazioni massicce cristalline della plaga indiziata.

Tale magma, cioè, partendo dalle rocce quarzodioritiche e passando man mano alle granodioriti ed ai graniti (ma sempre a plagioclasio abbondante) diffusi nella regione, dette le pegmatiti avanti cennate ed infine queste schizoliti estremamente acide che sono le silexiti in esame.

Le sollecitazioni tettoniche posteriori impressero poi alle schizoliti quella struttura cataclastica, che le dotò di importanza industriale e che si riscontra anche nelle pegmatiti di Parghelia (sul versante tirrenico della Calabria a qualche km. da Tropea sul Promontorio di Capo Vaticano) descritte più recentemente dal Penta [1]); le quali pegmatiti, variamente ricche di quarzo, grazie appunto a questa loro struttura da oltre un secolo sono coltivate per la produzione di «sabbie silicee».

E come per le pegmatiti di Parghelia, anche per le masse pegmatitiche e quarzose del territorio di Davoli e Satriano si può pensare col De Lorenzo [2]) che esse costituiscano formazioni isterogenetiche delle plutoniti extravasate durante un grande diastrofismo orogenico, contemporaneo, forse, dei fenomeni di corrugamento intervenuti nelle ultime fasi del carbonifero.

Mancando ogni fenomeno di contatto e ricordando le intercalazioni nella massa di quarzo di rocce quarzodioritiche ugualmente alterate come quelle incassanti, deve escludersi che le silexiti e le pegmatiti di Davoli e Satriano possano rappresentare iniezioni di magmi più gio-

---

[1]) Penta F., *Studio petrografico della pegmatite di Parghelia (Catanzaro-Calabria) con osservazioni sulle leggi di geminazioni di Periclino nell' Albite e nel Microclino.* Schweiz. Min. u. Petr. Mitt., vol. XIII. Zürich, 1933.

[2]) De Lorenzo G., *Studi di geologia nell' Appennino Meridionale*, pag. 12, 18 e 44. Atti R. Acc. Sc. Fis. e Mat., vol. VIII, s. 2ª, N. 7. Napoli, 1896.

vani; possibilità ammessa in genere dal De Lorenzo [1]) per le pegmatiti di Parghelia e per i vari dicchi acidi calabresi.

Differenza sostanziale, che va notata, fra le cataclasiti in esame e quelle di Parghelia sta nel grado di differenziazione in esse raggiunto; il quale, mentre è massimo nelle silexiti di Davoli e Satriano, si arresta praticamente a quello pegmatitico nelle rocce di Parghelia, ove è ben difficile rinvenire masse di roccia di qualche mc., nelle quali al quarzo non si accompagni il feldspato, sia esso originario o, come più frequentemente, albitizzato.

III) *Utilizzabilità dei giacimenti.* — I filoni e ammassi silexitici sopra descritti, quali oggi sono individuabili nella zona, costituiscono, senza dubbio, un insieme di potenzialità non trascurabile, quando si pensi che nel solo vallone Leggio, l'unico ove hanno luogo sistematici lavori di esplorazione e preparazione, sono state accertate oltre cinquecentomila tonnellate di quarzo puro.

Un esame di massima della coltivabilità di tali depositi è possibile solo per quast'ultima contrada; ma con ogni attendibilità le conclusioni, cui si giunge, possono estendersi anche alle altre per le analoghe condizioni di giacitura che vi si riscontrano e, più che altro, per l'identico stato fisico del minerale utilizzabile.

Pertanto, riferendoci al vallone Leggio, notiamo che le condizioni di coltivabilità del giacimento sono eccezionalmente favorevoli, sia per la superficialità del minerale utile (lo spessore medio della coltre di copertura è di appena m. 5) sia per la sua speciale giacitura in forte declivio verso fiume; ciò che permette il rapido ed economico smaltimento del materiale di coperta e l'attacco simultaneo, su vasto fronte ed a varie quote, del minerale mediante sistemi di cantieri a gradini scaglionati lungo il declivio. Di più, per effetto del cennato stato cataclastico, la silexite consente l'abbattimento senza uso di mine, potendo esso aver luogo, con resa soddisfacente, a mano od ancora mediante impiego di escavatrici meccaniche di alta potenzialità ed elevato rendimento.

Inoltre il materiale abbattuto può, mediante opportuni ruzzolatori, colleganti i vari piazzali, essere raccolto sul piano della stazione di partenza della teleferica, già impiantata a fondo valle; e quivi, dopo lavaggio e classifica entro appositi vagli alimentati dalla vicina cascata, venir caricato. Altri ruzzolatori, defluenti verso i valloncelli di fondo, potranno servire per lo scarico dei materiali di coperta e delle intercalazioni di sterile esistenti nel quarzo. In tali condizioni si può sicuramente ottenere, con un prezzo di costo del minerale reso

---

[1]) De Lorenzo G., *Op. cit.*

alla stazione di partenza della teleferica, non superiore a L. 5 la Tonn, (ivi comprese le spese di scoperta, cernita e lavaggio) la produzione giornaliera di qualche centinaio di tonnellate; corrispondente cioè alla effettiva potenzialità della teleferica automotrice già esistente.

Detta teleferica ha un percorso di circa m. 2.600 e, partendo dal piazzale di cava (q. 352 sul mare), giunge alla stazione di rimando sulla rotabile in prossimità del ponte sul fiume Ancinale (q. 106) nonchè della stazione ferroviaria di Soverato. Di qui, a mezzo camions, il minerale grezzo può giungere a Soverato Marina (km. 17), in uno speciale Stabilimento per la trasformazione in prodotti semi-lavorati.

Trattandosi di quarzo tecnicamente puro, sono da considerarsi le seguenti utilizzazioni industriali:

1.°) Per ceramiche (ingrediente per la manipolazione delle paste e per smalti da porcellane).

2.°) Per vetrerie (materia prima per la preparazione della pasta da vetro).

3.°) Per vetri da ottica (prodotti di rara purezza per la fabbricazione dei vetri da ottica).

4.°) Per isolatori elettrici (ingrediente per la preparazione di isolatori e coibenti elettrici).

5.°) Per l'industria refrattaria (ingrediente per la preparazione delle miscele per refrattari silicei).

Come è noto, per le utilizzazioni vetrarie e ceramiche, il prodotto deve essere sottoposto ad una preventiva macinazione, la quale, per le ceramiche, deve essere portata fino alla polverizzazione impalpabile; più grossolana, invece, ma in granelli equivalenti dal punto di vista volumetrico, deve essere la macinazione per uso vetrario.

Nel caso specifico si può ritenere che, mentre il quarzo per ceramica dovrà avere una grossezza di grani tali da attraversare uno staccio di 4.900 maglie per cm^2, per il quarzo da vetrerie è sufficiente un vaglio molto più grossolano; mentre per il quarzo da fonderia, refrattari, ecc. sono rispondenti grani anche più grossi.

Nello Stabilimento di Soverato in costruzione presso quel pontile d'imbarco sono previsti molitori a sfere, tipo Dorst, a camicia conica verticale, con appositi aspiratori destinati ad asportare dal granulato la polvere impalpabile e capaci di ottenere, con un conveniente ciclo di operazioni, del buon granulato per vetrerie insieme ad un sottoprodotto di alto valore commerciale, rappresentato dal ventilato per ceramica.

In particolare un apparecchio Dorst di Oberlind della potenza assorbita di 45 HP, può produrre, per 8 ore di lavoro, tonn. 10 di granulato per vetrerie della finezza di 625 maglie per cm^2, insieme ad

una tonnellata di ventilato della finezza di 4.900 maglie per cm^2, con un costo di produzione di L. 26 circa per tonnellata.

Basterà quindi, una batteria di quattro coppie di mulini per poter trattare efficacemente buona parte della produzione giornaliera delle cave, dovendosi riservare una parte del grezzo per l'utilizzazione per fonderie e per refrattari.

A quanti conoscano il grande interesse che dal punto di vista dell'economia generale presenti un giacimento cataclastico di quarzo purissimo, adatto fra l'altro per la fabbricazione dei vetri da ottica e dei più ricercati prodotti di ceramiche e vetrerie, non sfugge la reale vasta importanza dei sopradescritti giacimenti, che assicurano una notevole riserva di tale preziosa materia prima, in così eccezionali condizioni di coltivabilità e di trasporto

Napoli, Gabinetto di Arte Mineraria del R. Istituto Superiore di Ingegneria,
Agosto 1935 - XIII.

Di un' alga fossile nuova per la « pesciara » di Bolca

Nota della prof. **Maria Fiore**

(presentata dal socio ord. G. D' Erasmo nell' adunanza del dì 7 dicembre 1935 - XIV)

Sunto. — L' A. comunica di aver riscontrata un'alga nuova per la pesciara di Bolca (*Udotea palmetta*), e, siccome la patria di quest' alga è la Nuova Olanda, fa rilevare che, come è stato suggerito dal Forti a proposito di altre alghe, è da ammettersi affinità tra le alghe fossili di Bolca e quelle che al presente vivono negli oceani Pacifico e Indiano.

Mesi or sono essendomi recata a Bolca (Verona) ho acquistato dal raccoglitore di fossili Erminio Cerato un' alga fossile di recente ritrovamento in Valle Cherpa e propriamente nella nota località così detta « pesciara » di Bolca.

Si tratta di una discreta impronta (parte e controparte) brunastra, flabelliforme, conservatasi in calcare marnoso lievemente bituminoso. Misura cm. 4 di massima ampiezza per cm. 8 di massima lunghezza di cui tre spettano allo stipite cilindraceo da cui si diparte il flabello. Questo è di forma cuneiforme-orbicolare, termina sfrangiato e mostra in modo poco marcato quattro zone colorate più intensamente, concentrico-trasverse, di mm. 1-2 di ampiezza. L'intero tallo, oltre per i detti caratteri, anche per la sua struttura e cioè per essere costituito da un insieme agglutinato di filamenti che si irraggiano dallo stipite nel flabello, mi sembra che con molta probabilità sia un' alga da riferirsi a qualche specie del genere *Udotea* e propriamente all' *Udotea palmetta*.

Data la patria presente di quest'alga, che fu raccolta a Porto Denison nella Nuova Olanda, il ritrovamento dell' alga descritta nella pesciara di Bolca verrebbe in appoggio dell' opinione del Forti che ritiene che vi sia affinità tra le alghe di Bolca e quelle che al presente vivono negli oceani Pacifico e Indiano, nel senso cioè che sia le alghe ora viventi nei detti eceani che quelle che ora si trovano fossili a Bolca dovettero avere i medesimi progenitori. Ciò nel fatto è da ammettersi con ogni probabilità, dato che ampia comunicazione doveva esservi ancora nell'eocene inferiore (orizzonte a cui appartiene la pesciara) tra il mare che copriva la regione di Bolca e il presente oceano Indo-Pacifico.

BIBLIOGRAFIA

De Toni G. B. — *Sylloge algarum*, V. I-V — 1889-1907.

Forti A. — *Alghe del Paleogene di Bolca (Verona) e loro affinità con i tipi oceanici viventi.* Mem. Ist. geologico R. Univ., vol. VII, Padova, 1926.

Massalongo A. — *Syllabus plantarum fossilium* — Verona, 1859.

Meschinelli L. e Squinabol S. — *Flora tertiaria italica*, 1892.

Schimper Ph. — *Paléontologie végétale.* Vol. I., Paris, 1869.

Nuova teoria delle serie semplici e dei metodi di sommazione: il prodotto, l'assoluta convergenza e la teoria dei gruppi

Nota del socio corrispondente **Giulio Andreoli**

(Adunanza del dì 7 dicembre 1935 - XIV)

Sunto. — La teoria della sommazione delle serie divergenti, sviluppata da molteplici punti di vista, si completa in un quadro unico ed organico se viene posta in relazione ai gruppi di sostituzione su infiniti elementi. Acquista poi maggiore perspicuità se si considera ogni serie come rappresentata (e rappresentante) da un punto di un certo spazio ad un' infinità numerabile di dimensioni (spazio *non* metrico, ma godente di proprietà analoghe a questo). Se si ammettono poi come elementi fondamentali per la sommabilità non solo le sostituzioni su infiniti elementi, ma, altresì le trasformazioni lineari (opportunamente definite) in detto spazio la teoria stessa si amplia così da poter comprendere quella della sommabilità attraverso i processi di composizione del Volterra (sviluppata per prima dalla Nalli). E risulta evidente che, anche per un certo prefissato processo di sommazione, il valore della somma non è unico ma presenta una certa specie di polidromia, e questo in accordo con alcune vedute del Sannia.

In questa nota porremo porremo in luce i legami fra le teorie di sommazione delle serie divergenti, quelle delle sostituzioni su infiniti elementi e quella di certi spazi; tratteremo dopo dei procedimenti o dei metodi di sommazione.

Ci limiteremo esclusivamente alle serie semplici: ma dallo stesso schema di ricerca risulta ben chiaro come teorie analoghe valgano per l'estensione alle serie multiple. I legami cui accenniamo si presentano in due momenti successivi e distinti delle teorie che andiamo a svolgere.

§ 1. *Elementi fondamentali.*

1. Per poter svolgere la teoria dei metodi di sommazione, sono necessari tre capisaldi che qui seguono, distinti in due gruppi: i primi due, e l' ultimo.

Fissato un certo metodo $[M]$ di sommazione, occorre che:

I. La somma $M(\Sigma)$ di una serie convergente (Σ) (cioè sommabile attraverso la definizione elementare che chiameremo $[C]$) ottenuta con $[M]$, deve essere eguale alla somma ordinaria, $C(\Sigma)$.

II. La somma $M(\Sigma)$ della serie (Σ), ottenuta con $[M]$ deve potersi

usare come un qualsiasi numero nel calcolo algebrico, esclusa l'operazione di limite; e pertanto:

Il *a)* date le serie non convergenti $(\Sigma'), (\Sigma'')$ sommabili $[M]$ e costruita la loro serie somma $(\Sigma) = (\Sigma') + (\Sigma'')$, ottenuta sommando i termini corrispondenti delle due, anche questa deve essere sommabile $[M]$ e deve essere:

$$(\Sigma) = (\Sigma') + (\Sigma'') \quad ; \quad M(\Sigma) = M(\Sigma') + M(\Sigma''). \tag{A}$$

Il *b)* nelle stesse condizioni, $[M]$ deve essere applicabile a (Σ^*) dedotta per moltiplicazione da $(\Sigma'), (\Sigma'')$; e la somma di quest'ultima deve soddisfare alla

$$(\Sigma^*) = (\Sigma') \cdot (\Sigma'') \quad ; \quad M(\Sigma^*) = M(\Sigma') \cdot M(\Sigma''). \tag{B}$$

Dalle condizioni I e II *a)* segue che lo scambio di due (e quindi di un numero finito di) termini di una serie non altera la sua somma ottenuta con $[M]$.

Ed infatti, se — per semplicità — si scambiano i primi due termini, la nuova serie così ottenuta, si può ricavare facendo la somma della data con l'altra $(a_2 - a_1) + (a_1 - a_2) + 0 + 0 + \ldots$, ovviamente convergente.

In modo analogo si deduce che se in una serie sommabile $[M]$ si separino i termini in due gruppi e si formino con essi due nuove serie, col considerare cioè i termini del primo (e rispettivamente del secondo) gruppo, completando con zeri al posto di quelli del secondo (e rispettivamente del primo), la somma della serie primitiva si otterrà addizionando le somme delle due serie così ottenute, sempre in riferimento al metodo $[M]$. Ne consegue subito che se nella serie data esiste un gruppo di termini a sè stanti che formano una serie convergente, la somma della serie data fatta con $[M]$ è eguale alla somma ordinaria della porzione convergente aumentata della somma col metodo $[M]$ dell'altra serie ottenuta dalla primitiva con zeri al posto dei termini che formavano la serie convergente.

III. La somma di (Σ) è eguale a quella della serie $(\bar{\Sigma})$ ottenuta spostando tutti i termini di un posto a destra e ponendo 0 al primo posto: cioè

$$M(\Sigma) = M(\bar{\Sigma})$$

$$\Sigma = a_0 a_1 + a_2 + \ldots \quad ; \quad \bar{\Sigma} = 0 + a_0 + a_1 + a_2 + \ldots .$$

Da questa, e dalle precedenti premesse, risulta subito che le due serie (Σ) e (Σ_1), ove

$$(\Sigma_1) = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

devono essere entrambe sommabili $[M]$; e fra le loro somme deve valere la relazione

$$M(\Sigma) = a_0 + M(\Sigma_1).$$

Ed in effetti, essendo:

$$(\Sigma) = (\overline{\Sigma_1}) + (a_0 + 0 + 0 + \dots)$$

l'affermazione fatta si ricava dalle premesse.

2. Si osserva subito che (ad esempio) il metodo di Cesàro non sembra incluso nelle nostre considerazioni, poichè viene a mancare la condizione II*b*. Si rilevi però che se due serie sono sommabili secondo Cesàro con medie di un certo ordine, la serie prodotto è sommabile con medie di un altro certo ordine più elevato; e che con tali medie risultano sommabili anche le due serie fattori.

Riserveremo pertanto la locuzione di « processo di sommazione » a quei procedimenti per i quali II*b* non è verificato, pur ripetendosi le condizioni analoghe a quello di Cesàro. In altri termini: un *metodo* di sommazione, rappresenta l'insieme di processi di sommazione $P_1, P_2, \dots$ tali che α) per ogni P_r valgano le proprietà I, II*a*, III; β) che ogni serie sommabile P_r è altresì sommabile $P_{r+1}, P_{r+2}, \dots$, sempre con la stessa somma; γ) che il prodotto di due serie sommabili P_r è sempre sommabile P_ρ e valendo allora la proprietà $P_\rho(\Sigma^*) = P_r(\Sigma') \cdot P_r(\Sigma'')$. Si vede che tali considerazioni portano precisamente su quelle del Sannia relative a classi di metodi, ai metodi di Borel generalizzati etc.

Può darsi che $P_1 \equiv P_2 \equiv \dots$ come è il caso del procedimento basato sul teorema di Abel.

Come si vede, il nodo per la costruzione di una teoria dei metodi di sommazione sta precisamente nella condizione II *b*, che lega fra loro dei procedimenti di sommazione. Le altre sono quasi immediate ed intuitive nel loro uso e nel loro effetto, in quanto dovute al principio di permanenza ed in quanto perciò sono valide per le serie convergenti.

§ 2. *La serie prodotto di altre due. Rapporto fra i gruppi di sostituzioni e la teoria delle serie.*

3. Resta quindi precisamente da delineare e caratterizzare la condizione II*b*. Parlando di serie prodotto, che cosa si intenderà? Abitualmente si sceglie come legge di formazione della serie prodotto quella di Cauchy. Essa deriva, di fatto, dall'aver supposto la serie come ottenuta da una serie di potenze in una « *indeterminata* » ξ; tale indeterminata si conserva *durante tutte* le operazioni formali

(ad esempio: deduzione della serie-somma; della serie-prodotto di due altre etc.) e scompare, sostituita dal valore numerico *1*, allorchè da tali operazioni si debba passare a quella che ci interessa, costituita dall' attribuire — secondo il metodo M — una somma alla serie finale.

È bene rilevare che tutti i processi ed i metodi sinora usati sono precisamente ottenuti col prodotto eseguito secondo CAUCHY; e quindi le somme dipendono essenzialmente da tale premessa, cioè dall' eseguire il prodotto secondo CAUCHY.

Si intende che quei procedimenti di sommazione i quali non tengano conto di introdurre anche la condizione II b — o in quanto « processi » o in quanto « metodo », cioè classi di processi — non consentono l'uso delle serie divergenti come elementi di calcolo algebrico: soddisferanno tutt' al più eventualmente a speciali tipi di problemi (lineari).

Ed intanto, si vede subito che si possono ben definire altri tipi di prodotto, i quali egualmente possono trovare la loro giustificazione (come qüello di CAUCHY) in sviluppi di analisi, ed i quali si riattaccano ad altre serie che non sieno quelle di potenze.

Due esempi mostreranno ciò. Anzitutto si considerino le serie numeriche date, come ottenute da serie di DIRICHLET in una certa indeterminata.

Così

$$(A) \equiv a_0 + a_1 + \ldots (B) \equiv b_0 + b_1 + \ldots$$

si considerino connesse alle serie

$$A_\lambda(\xi) \equiv \sum_0^\infty a_r e^{\lambda_r \xi} \quad ; \quad B_\lambda(\xi) \equiv \Sigma\, b_r e^{\lambda_r \xi}.$$

È troppo evidente che la serie prodotto di (A) e (B), sarà quella serie (C) cui è connessa la serie $C_\lambda(\xi) = A_\lambda(\xi)\, B_\lambda(\xi)$.

Se $\lambda_r \equiv r$, si ritrova la legge di CAUCHY; se $\lambda_r = \log r$ se ne trova una del tutto diversa; ed in ogni caso dato l'insieme numerabile dei numeri λ_r, che si riproduca per somma dei λ fra loro, ad ogni *suo diverso ordinamento* in una successione, già corrisponde una diversa legge di prodotto; questa quindi dipenderà e dalla scelta delle λ, e dal loro ordinamento.

Ad esempio: convenendo che alle serie numeriche siano connesse serie di potenze ordinate cosi ξ, 1, ξ^3 ξ^2, ... si vede che la legge di prodotto assume la forma:

$$(a_0 + a_1 + \ldots) \cdot (b_0 + b_1 + \ldots) = (c_0 + c_1 + \ldots)$$

con

$$c_0 = a_0 b_1 + a_1 b_0 \quad ; \quad c_1 = a_1 b_1 \quad ; \quad c_2 = a_0 b_2 + b_0 a_2 \quad ; \quad c_3 = a_0^2 + a_1 b_2 + a_2 b_1 ; \ldots ;$$

e con tale legge, il procedimento di ABEL porta a conferire alla serie

$$1-1+1-1+1-1.,.$$

il valore $-\frac{1}{2}$ invece che $\frac{1}{2}$; ed allo stesso valore condurrebbero le medie di CESÀRO.

4. Si vede pertanto che, anche ammessa come fondamentale la rappresentazione della serie come serie di potenze in una indeterminata, si possono presentare diversi tipi di leggi di prodotto. Precisando, assegnata che sia la serie $(A) \equiv a_0 + a_1 + a_2 + \dots$, facciamo ad essa corrispondere la serie $(TA) \equiv a_r + a_s + \dots$ ottenuta con una certa sostituzione T sugli infiniti elementi — ed analogamente dalla serie (B) si passi alla serie (TB). Ora a ciascuna delle due facciamo corrispondere la serie di potenze nell'indeterminata ξ e formiamo il prodotto di queste, cioè $TA(\xi) \cdot TB(\xi)$; e da questa ripassiamo prima alla serie numerica e poi all'altra serie numerica che dalla ultima si ottiene applicando la sostituzione inversa: si considera cioè $T^{-1}\{(TA)\cdot(TB)\}$.

Così, nel caso dianzi indicato, la sostituzione è data dal prodotto delle trasposizioni $(01), (23), (45) \dots$ in numero infinito.

Resta dunque giustificato l'asserto: che esistono leggi di prodotto diverse da quelle di CAUCHY; e che ciò si verifica anche nel caso di assimilazione delle serie a serie di potenze.

5. Esaminiamo ora quale debba essere la legge di prodotto — o meglio a quali condizioni deve soddisfare — affinchè la somma della serie goda e della proprietà associativa e della proprietà commutativa, nel prodotto di più serie.

Intanto, per l'accezione abituale, il prodotto $a_r\, b_s$ di un termine della prima per un termine della seconda serie deve essere uno degli addendi che, sommati fra loro, dànno l'elemento ρ-esimo della serie prodotto. Per semplicità e come inizio, ci limitiamo al caso che gli addendi del tipo detto, i quali concorrono a formare un certo termine della serie prodotto, siano in numero finito.

In altri termini, il prodotto del termine r-esimo della prima e di quello s-esimo della seconda forma uno degli addendi del termine ρ-esimo della serie prodotto; avendosi pertanto

$$\rho = F(r, s).$$

La funzione F è una funzione numerica a valori interi, che assume tutti i valori interi ove le variabili r, s sieno a lor volta nu-

meri interi; e per l'ipotesi restrittiva fatta, esiste solo un numero finito di coppie r, s tali che

$$F(r', s') = F(r'', s'') = \ldots = \rho$$

essendo ρ assegnato.

Potendosi ovviamente cambiare l'ordine delle serie fattori, e volendo che i prodotti ottenuti con lo scambio delle a e b appartengono tutti (a due a due) come addendi allo stesso termine della serie prodotto, dovrà essere ovviamente

$$F(r, s) = F(s, r). \qquad (1)$$

Se moltiplichiamo consecutivamente tre serie fra di loro e vogliamo che sia mantenuta — come già indicato per le serie — anche per gli aggruppamenti di termini la proprietà associativa, dovrà essere

$$F(r, F(s, t)) = F(F(r, s), t) = \ldots \qquad (2)$$

Seguendo poi esclusivamente il gioco col quale si combinano gli indici, senza preoccuparci del valore numerico degli elementi che tali indici posseggono, vediamo subito come *tali condizioni vengono a fissare un gruppo di sostituzioni permutabili* (si intende negli indici stessi).

Infatti, consideriamo tutti gli indici 0, 1, 2..., n,... della seconda serie-fattore; moltiplichiamo gli elementi corrispondenti ordinatamente per quelli della prima serie [1]); ad ognuno di questi corrisponderà allora una permutazione degli indici, in quanto da 0, 1, 2... si passa nella prima linea, ai numeri $\rho_0, \sigma_0, \ldots$ che sono fissati da $F(o, n)$; nella seconda linea, ai numeri $\rho_1, \sigma_1, \ldots$ fissati da $F(1, n)$ e così via.

In altre parole: ad ogni termine della prima serie, considerato moltiplicante i singoli termini della seconda, corrisponde una sostituzione operante sugli indici di questi. Si ha dunque un quadro di sostituzioni; e le condizioni (2) dicono precisamente che tali sostituzioni formano gruppo, mentre le (1) ci dicono che esse sono altresì permutabili.

Pertanto:

Ogni legge di prodotto è collegata ad un gruppo di sostituzioni

---

[1]) I prodotti $a_r b_s$ formano una doppia infinità numerabile; e quindi una serie doppia; fissare una legge di prodotto equivale sostanzialmente ad ordinare ed aggruppare i termini di tale serie doppia sì da ottenerne una semplice.

su infiniti elementi (tutte permutabili fra loro) che operano sugli indici; il gruppo determina la legge di prodotto; questa — nelle condizioni già indicate — determina quello.

6. Come abbiamo già notato, alle serie di DIRICHLET — o se si vuole alle serie di potenze ad esponente qualunque — vanno certamente collegate delle leggi di prodotto.

Ed invero, se un insieme numerabile ed ordinato di numeri λ_r è tale da riprodursi per somma (cioè $\lambda_r + \lambda_s = \lambda_\rho$), questa basta a fissare le serie di DIRICHLET

$$\Sigma a_r e^{\lambda_r \xi}$$

o se si vuole le serie di potenze

$$\Sigma a_r \xi^{\lambda_r},$$

ed a fissare simultaneamente la legge di prodotto, proprio in base all'additività ammessa: $\lambda_r + \lambda_s = \lambda_\rho$; e come si è già notato, occorre non solo assegnare l'insieme delle λ, ma altresì *ordinarlo*.

Ordinato che esso sia in un certo modo, da esso restano sempre deducibili infinite altre leggi di prodotto; quelle che si ottengono permutando le λ, secondo l'esempio che — con le (TA) e (TB) — è stato già portato per la legge di CAUCHY.

E troppo evidente che *non* tutte le leggi di prodotto si possono ricondurre a quello di CAUCHY, anche considerata la diversa possibilità di ordinamento. In effetti, se si dà un insieme di punti λ equidistanti sulla retta, comprendenti lo zero, si ha precisamente la legge di CAUCHY; e ordinando poi con un qualunque modo tali punti, si otterranno le leggi che abbiamo già indicato con TA etc.

Se invece si fissa nel piano un qualsiasi reticolato a parallelogrammi, e si ordinano in una successione i vertici di tali parallelogrammi, si avrà ancora una legge dello stesso tipo, ma più generale. E così via.

Naturalmente si pone la quistione: *è ogni legge di prodotto pensabile come collegata ad una serie di* DIRICHLET?

7. Per delineare meglio quali sieno i tipi possibili di leggi di prodotto, cominciamo dal classificarli. Il più semplice è quello per il quale un qualunque elemento di una certa serie, se questa viene moltiplicata per un'altra, entra a far parte degli addendi che compongono un altro *qualunque* termine della serie prodotto, almeno sotto certe limitazioni. Introducendo il concetto « *indeterminata* » una serie numerica (A) va allora considerata come associata alla

serie di potenze intere crescenti, in quella indeterminata, cioè ad

$$(A) \equiv a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

va associata la

$$(A(\xi)) \equiv a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \dots$$

E questa sarà il tipo più semplice di legge, corrispondente al prodotto secondo CAUCHY. A tal caso fa subito seguito l'altro ora indicato: si permutino gli elementi di A secondo una certa legge, introducendo eventualmente degli zeri, purchè nella nuova serie vi sieno *tutti* gli elementi di A. Sia $(\overline{A})$ la serie così ottenuta; si proceda in modo analogo su (B), ottenendo $(\overline{B})$; ad $(\overline{A})$ e $(\overline{B})$ si associno le serie di potenze crescenti $(\overline{A}(\xi))$, $(\overline{B}(\xi))$, e di questi se ne faccia il prodotto, di CAUCHY, che chiameremo $\overline{C}(\xi)$. Da $\overline{C}(\xi)$ si ripassi alla serie $\overline{C}$ numerica e da questa alla $(\overline{C}_1)$, col procedimento inverso a quello prima usato: (C) sarà il prodotto di (A) e (B).

In quanto alla presenza degli zeri, la loro distribuzione deve essere tale che con gli stessi indici con i quali essi sono stati introdotti in $(\overline{A})$, si devono trovare in $(\overline{B})$, e si devono trovare in $(\overline{C})$.

Se noi osserviamo che $(\overline{A})$, $(\overline{B})$ si moltiplicano secondo CAUCHY, risulta chiaro che dovremo ricercare, per tale legge di prodotto, quali sieno gli indici di quei termini, tali che annullatisi in $(\overline{A})$ e quindi in $(\overline{B})$, diano nulli i corrispondenti in $\overline{C}$. Si verifica agevolmente che ciò avviene — ad esempio — annullando i primi p; oppure annullando tutti quelli che non sono multipli di un certo numero q; oppure facendo l'una e l'altra cosa assieme.

Si avranno leggi più complesse di moltiplicazione introducendo invece di una, due indeterminate ξ, η, sicchè si debba fissare una legge che ai due numeri m ed n interi, esponenti rispettivi di ξ ed η, corrisponda un indice ρ del termine a_ρ che accompagna $\xi^m\eta^n$ quale coefficiente, e reciprocamente che date ρ resti sempre ed in un sol modo fissata la coppia ordinata m, n.

Allora il tipo più semplice — corrispondente a quello di CAUCHY — di tali leggi di prodotto, si otterrà ordinando per gruppi di valori crescenti di $m+n$, ed in ciascuno di tali gruppi ordinando per valori crescenti di m.

In tal guisa, alla serie $(A) \equiv a_0 + a_1 + a_2 + \dots$, si associa la serie di potenze in due indeterminate

$$(A(\xi\ \eta)) \equiv a_0 + a_1\eta + a_2\xi + a_3\eta^2 + a_4\xi\eta + a_5\xi^2 + \dots$$

ed analogamente per la serie B.

A questa legge di prodotto più semplice restano poi collegate tutte quelle ottenute con permutazioni finite, nel senso che dalla serie (A) si passi a serie $(\overline{A})$, con l'aggiunta di zeri, con scambi di posti e con la condizione che ad un elemento di indice finito in (A) o $(\overline{A})$ corrisponda un elemento di indice finito in $(\overline{A})$ o (A).

Si possono così introdurre due, tre, ... infinite indeterminate ed è bene osservare che le serie di DIRICHLET danno luogo precisamente a tutti questi casi. Anzi, le serie di DIRICHLET ordinarie.

$$\Sigma a_r r^{-s}$$

dànno proprio luogo al caso di una serie ad infinite indeterminate, corrispondenti rispettivamente ξ_1 al valore 2, ξ_2 al valore 3,... e così via per tutti i numeri primi.

§ 3. *La convergenza assoluta totale o parziale. Suoi rapporti con i gruppi di sostituzioni.*

8. La teoria dei gruppi di sostituzioni su infiniti elementi si riconnette a quella delle serie anche per altra via.

Infatti, come è elementare oramai, la definizione di serie assolutamente convergente può essere data in due modi distinti, ma equivalenti. Nel primo si esamina la convergenza o meno della serie dei moduli; col secondo invece si esamina la possibilità di permutare termini (anche in numero infinito) conservando la convergenza e — sotto certe condizioni per il tipo di sostituzione applicata — anche la somma della serie; affermandosi poi l'equivalenza delle due definizioni.

Richiamiamo una terminologia da noi usata altrove [1]), possiamo dire che le serie assolutamente convergenti sono quelle di cui la somma sia invariante rispetto al gruppo dei « *cicli* », formante sottogruppo del gruppo totale.

Se poi si considerano anche le « *catene* » cioè le sostituzioni del tipo $(a\,b\,c...)$ [nelle quali il primo elemento si muta nel secondo, questi nel terzo e così via ad infinitum, mentre *nessuno* si muta nel primo], allora si può dire che; *la somma di nna serie assolutamente convergente, e la somma di un' altra serie da essa dedotta mediante una qualsiasi sostituzione, differiscono per la somma dei termini (o per la somma della serie di quei termini), i quali formano « traccia »: ovverosia, che non provengono da alcun altro elemento, a sostituzione applicata, e che quindi non si riscontrano nella nuova serie.*

---

[1]) G. ANDREOLI, *Sui gruppi di sostituzioni che operano su infiniti elementi*. **Rend. Circ. Mat Pal., 1916.**

Esaminando tali concetti, si vede subito che: la sola serie avente somma invariante rispetto al gruppo totale è quella avente tutti gli elementi nulli; che tutto il complesso di sostituzioni che lascia invariata la somma di una serie ass. conv., contiene il complesso dei cicli; ma contiene altresì quelle altre sostituzioni che presentino catene, purchè queste catene abbiano come traccia gli eventuali elementi nulli della serie o gli eventuali gruppi di elementi a somma nulla; ed oltre tutte queste sostituzioni conterrà anche quelle ottenute coi sottogruppi dei cicli a tali catene relative.

Ciò si vede subito in quanto una catena sopprime — nella nuova serie — un elemento, quindi nella nuova serie la somma sarà eguale a quella dell'antica, diminuita di tale elemento.

Pertanto ad ogni serie viene ad essere collegato un certo sottogruppo che ne lascia invariata la convergenza e la somma. Tale sottogruppo contiene tutte le sostituzioni formate da cicli, operanti su certi termini, e quelle formate da sostituzioni aventi una o più catene di cui le tracce siano elementi nulli o gruppi di termini a somma nulla.

Inoltre alla stessa serie viene ad essere collegata un altro sottogruppo, più ampio del precedente, per le sostituzioni del quale la somma si modifica: tale sottogruppo si ottiene dal precedente ampliandolo con catene formate con gli elementi sui quali opera il primo sottogruppo

Per le serie convergenti a termini positivi, il primo sottogruppo è quello formato dai cicli, il secondo è quello totale.

Se due serie hanno il medesimo sottogruppo, anche la loro serie somma e la loro serie prodotto (questa sotto certe condizioni) hanno ancora il medesimo sottogruppo (o uno più ampio); mentre se hanno sottogruppi diversi potremo affermare soltanto che la serie-somma e la serie prodotto hanno il sottogruppo intersezione (o uno più ampio).

Per la somma, ciò è quasi immediato; non così per il prodotto: ed infatti. parlando di serie prodotto, abbiamo già visto che bisogna dare la legge di formazione, ciò che equivale a fissare un certo gruppo abeliano.

Se, ad esempio, si ammette che tale prodotto si esegua come serie di DIRICHLET ordinaria, e quindi i termini $a_r . b_s$ concorrono a formare il termine c_ρ della serie prodotto, in modo che $\rho = r . s$, allora — ove il gruppo di parziale assoluta convergenza sia quello operante sui termini i cui indici sono $1, n, n^2, n^3, \ldots$ — risulta subito che anche per la serie prodotto tale gruppo è quello di parziale assoluta convergenza (o è in questo contenuto).

Ed invero, si potrà scrivere

$$(A) = (A') + (A'') \quad ; \quad (B) = (B') + (B'') ,$$

ove le serie con un apice sono ottenute da (A) o (B) considerando soltanto i termini i cui indici sono del tipo indicato, cioè n^r, ed i restanti sono sostituiti da zero; mentre (A'') e (B'') sono ottenute ponendo degli zeri al posto dei primi termini e lasciando invariati gli altri.

Ora, data la legge di prodotto, risulta evidente che, scritta

$$(A).(B)=(C)$$

sarà anche

$$(C)=(C')+(C'')$$

ove però

$$(C')=(A').(B') \quad ; \quad (C'')=(A'').(B'')+(A')(B'')+(A'')(B').$$

E poichè in sostanza quei termini della serie (A) e della serie (B) con indici potenze di n formano due serie assolutamente convergenti, tale risulterà anche (C') che ne è — secondo questa legge di DIRICHLET — il prodotto.

E resta così dimostrato l'assunto.

Viceversa qualcosa di simile *non* vale per la legge di CAUCHY. Si vede dunque che per poter affermare quanto si è detto, relativamente al prodotto, occorre che la legge di prodotto sia tale da far restare invariati i termini sui quali opera il gruppo di parziale convergenza assoluta.

Volendo precisare meglio i concetti ora delineati, si può dire che a fianco dell'ordinaria convergenza assoluta (o totale) si presentano delle convergenze assolute parziali. La prima è tale rispetto al gruppo totale: e quindi si può dire che una serie convergente lo è in modo assoluto e totale, se operata su di essa una qualsiasi sostituzione che non faccia sparire termini, ed ottenuta così una nuova serie, la differenza di questa con la data è ancora una serie convergente, di somma zero.

Invece una serie è convergente in modo assoluto, parzialmente (rispetto ad un gruppo Γ) se la detta proprietà vale *soltanto* rispetto alle sostituzioni di Γ.

Tutte le serie convergenti sono assolutamente convergenti rispetto al gruppo delle sostituzioni operanti su un numero finito di termini.

§ 4. *Lo spazio Σ' delle serie e la sua struttura topologica.*

9. Una serie — convergente o no — sia rappresentata in uno spazio ad un'infinità numerabile di dimensioni, di cui le coordinate successive sieno i singoli termini della serie stessa: in altri termini alla serie $(A)\equiv a_1+a_2+a_3+\ldots$ corrisponda il punto A con le coordinate $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$.

Premettiamo che tale spazio *non sarà metricizzato* in alcun modo, ma semplicemente sarà caratterizzato topologicamente.

Due punti fondamentali occorrono in tale spazio: il punto nullo « O », origine dato da $(0, 0, \ldots)$ ed il punto metrico « U » dato da $(1, 1, 1, \ldots)$.

Al solito sarà definito come vettore di questo spazio l'elemento caratterizzato da tutte le coppie di punti per le quali le coordinate omonime abbiano egual differenza fra loro: e potremo perciò sempre riferirci — come rappresentante il vettore di due serie, a quello caratterizzato dall'origine e dalle coordinate differenze di quelle delle due serie date.

Chiameremo « *foglio di convergenza* » $\Phi(O)$ *relativo al punto* O, o « *fondamentale* » *l'insieme di tutti i punti che rappresentano serie convergenti;*

ed analogamente foglio di convergenza relativo al punto A, $\Phi(A)$ l'insieme di tutte le serie che si ottengono aggiungendo ad A una qualunque serie convergente.

È chiaro — per le definizioni stesse — che:

I. Il foglio di convergenza relativo ad un punto A è ottenuto da quello fondamentale per traslazione di tutti i punti di questi parallelamente ad $A - O$,

II. Due generici fogli di convergenza si ottengono per traslazione l'uno dall'altro.

Il foglio di convergenza fondamentale è lineare in senso debole: se contiene A, contiene anche λA; se contiene A e B contiene anche tutti i punti $\lambda A + \mu B$.

III. Se il foglio di convergenza relativo ad A contiene B, anche quello relativo a B contiene A: anzi essi coincidono.

Il foglio di convergenza, in generale, non è uno spazio compatto secondo Fréchet; in effetti se definiamo come punto-limite di una successione $A_r \equiv (a_{r1}, a_{r2}, \ldots)$ un punto A^* pel quale

$$a_1^* = \lim_{r \to \infty} a_{r1} \quad ; \quad a_2^* = \lim_{r} a_{r2} \text{; etc.,}$$

allora non avviene in generale che, appartenendo tutte le (A) a $\Phi(0)$, anche le A^* vi appartengono. Ad esempio tutte le serie $(A_r) \equiv \frac{1}{1^\rho} + \frac{1}{2^\rho} + \ldots$ con $\rho = 1 + \frac{1}{r}$, appartengono a $\Phi(0)$, mentre *non* vi appartiene $A^* \equiv \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots$ Ed è perciò che abbiamo parlato di linearità in senso debole, in quanto $\Sigma \lambda_r A_r$ appartiene a $\Phi(0)$, se le A_r vi appartengono e sono in numero finito; può non appartenervi se esse sono in numero infinito.

Per le osservazioni fatte nei § precedenti questo foglio di con-

vergenza Φ ha proprietà gruppali; così se ad esso appartiene A, apparterranno anche tutti i punti ottenuti permutando un numero finito di cicli.

Ogni foglio di convergenza rappresenta dunque uno spazio lineare-gruppale in senso debole: cioè non si può affermare che la formazione del limite conduca ad elementi dello stesso foglio.

Elementi impropri dello spazio Σ saranno tutti quelli aventi almeno una coordinata infinita: ognuno di essi definisce a sua volta un foglio di convergenza.

10. Così come lo spazio Σ è stratificato in fogli di convergenza, ogni foglio di convergenza è stratificato a sua volta in cellule di convergenza assoluta.

Per *cellula di convergenza assoluta* K (o) *relativa all'origine, o fondamentale, intenderemo l'insieme di tutte le serie assolutamente convergenti.* E per cellula di convergenza assoluta $K(A)$, relativa ad A, intenderemo l'insieme di tutte le serie di cui la differenza con A sia una serie assolutamente convergente.

È chiaro che anche queste cellule formano uno spazio lineare in senso debole; però rispetto alle proprietà gruppali, possiamo dire — per quanto precede — che tale cellula fondamentale è invariante rispetto al gruppo totale di permutazioni sulle coordinate; che un'altra qualunque cellula è invariante rispetto a quello stesso gruppo di permutazioni che lascia invariato A; e che comunque ogni permutazione fra le coordinate muta sempre una cellula in un'altra cellula. Ciò che non avveniva per i foglietti.

D'altro canto abbiamo già visto che si possono definire convergenze assolute rispetto ad un sottogruppo Γ del gruppo totale G: per ciascuno di tali sottogruppi si avranno delle cellule di parziale assoluta convergenza, ed è ovvio che se Γ_1 contiene Γ_2, le relative cellule di convergenza saranno tali che invece la seconda contiene la prima.

Ognuna di tali cellule formerà sempre uno spazio lineare in senso ristretto.

Lo spazio Σ risulta dunque stratificato in foglietti di convergenza; ciascuno dei quali ottenibile dall'altro per traslazione; ognuno di tali foglietti è stratificato a sua volta in cellule di parziale assoluta convergenza, aggruppate a lor volta ognuna di esse — a seconda del sottogruppo — e compenetrate sì da aversi come nucleo in ogni aggruppamento una di assoluta convergenza totale.

Ma è anche possibile passare da una cellula all'altra, da un foglio all'altro, mediante un'operazione di limite ottenuta con un processo numerabile.

In effetti, date le serie (A) , (B) — per semplicità supporremo $A \equiv 0+0+\ldots$ — da questa si può passare a (B) aggiungendo successivamente le serie $b_1+0+0+0\ldots$; $0+b_2+0+0\ldots$; $0+0+$ $+b_3+0+\ldots$; e si vede che vi è proprio un' infinità numerabile di passaggi.

Pertanto solo con una qualunque successione di elementi cui si applichi il processo di punto-limite si potrà passare in generale da un foglio ad un foglio diverso.

11. Quanto è stato sinora fatto costituisce soltanto un primo aspetto della struttura topografica di Σ, e precisamente soltanto l'aspetto di tale spazio rispetto ad operazioni additive e rispetto al gruppo delle permutazioni delle coordinate.

Un ulteriore vincolo fra le diverse cellule ed i diversi fogli si ottiene considerando la formazione del prodotto. *Lo spazio* Σ *resta definito perciò, più completamente, quando e solo quando sia stata assegnata la legge del prodotto.*

Limitiamoci ad esporre quanto avviene se si sceglie come legge del prodotto quella di Cauchy. Per essa dati due punti P e Q si passa ad un terzo $P.Q$, ove la moltiplicazione si intenda eseguita con la legge prefissata.

In tal caso — avendo cioè fissata la legge di prodotto — fra le diverse cellule (ad esempio quelle del foglio fondamentale) si presenta anche un' altra connessione. Infatti, il prodotto di due serie assolutamente convergenti in modo totale dà una nuova serie assolutamente convergente in modo totale: e pertanto dalla cellula fondamentale di assoluta convergenza totale si passa sempre alla stessa cellula.

Viceversa, poichè il prodotto di una serie assolutamente convergente per una semplicemente convergente dà luogo ancora ad una che converge semplicemente, da un punto della cellula di assoluta convergenza totale e da uno del foglio fondamentale si passa ancora ad uno del foglio fondamentale; ed infine poichè il prodotto di due serie semplicemente convergenti può dar luogo ad una serie non convergente, si vede che l'operazione di prodotto fa uscire dal foglio fondamentale.

Tuttavia queste serie sono sommabili secondo Cesàro: ciò significa che — come le cellule di assoluta convergenza sono connesse fra loro a formare il foglio, così diversi fogli si connetteranno fra loro via via a formare enti più vasti, nei quali il carattere è dato dalla eventuale sommabilità secondo un processo o un metodo. Ma di ciò parleremo altrove.

Ci importa far notare come oltre al processo di limite, anche il

processo di prodotto permetta di uscire rispettivamente dalla cellula al foglio, dal foglio ad enti più vasti.

Il diverso modo di connettersi di questi fogli è legato alla legge scelta per il prodotto. Così, le stesse considerazioni si possono estendere — oltre che alle cellule di assoluta convergenza totale — a quelle più ampie di assoluta convergenza parziale rispetto ad un gruppo; e se di tal caso — per fissare le idee — richiamiamo l'esempio dianzi addotto di serie di DIRICHLET nelle quali l'assoluta convergenza parziale si riferisce agli elementi di posto $1, n, n^2, n^3, \ldots$, vediamo subito che il prodotto eseguito secondo la legge di DIRICHLET *non* fa uscire dalla cellula fondamentale.

In altri termini occorre considerare e il gruppo definito dalla legge di prodotto ed il gruppo rispetto al quale è definita la parziale convergenza assoluta: ciò per poter fissare la connessione fra le diverse cellule, fra i diversi fogli.

Elementi per una teoria matematica dell'equilibrio economico dinamico

Nota del dott. **Giulio La Volpe**

(presentata dal socio corr. G. Andreoli nell'adunanza del dì 7 dicembre 1935 - XIV)

Sunto. — L'A. considera le equazioni dell'equilibrio dinamico in un mercato, supponendo che vi siano e fenomeni di ereditarietà lineare (nel senso di Volterra) e fenomeni di ritardo, nel senso che vi sia azione ritardata, nel tempo, di un intervallo assegnato, riguardo agli effetti. Si limita a scrivere, deducendole da considerazioni economiche cui applica in sostanza metodi del calcolo funzionale, le equazioni del movimento economico.

1. Principio fondamentale della dinamica economica è il seguente: « Nel moto storico d'una economia, le forze, compatibilmente con i vincoli, sono in ogni istante in equilibrio ». Lo assetto che ad un dato istante assume il mercato è l'equilibrio dinamico. Oggetto della presente comunicazione è una teoria matematica dell'equilibrio dinamico e del moto storico, di cui espongo brevemente il contenuto.

La teoria è costruita sur un quadro opportunamente semplificato del mondo economico, nel quale agiscono individui, che nello stesso tempo possono essere lavoratori, capitalisti, risparmiatori e consumatori, e imprese rette da uno o piú individui.

La collettività dispone di lavoro e di servizi di certi beni durevoli (H), (in numero di h), perpetui o temporanei, non suscettibili di produzione, nè di scambio e di cui solo i servizi sono scambiabili (terreni, costruzioni, corsi d'acqua ed ogni altro bene economico naturale). Le imprese producono materie (beni non durevoli) e servizi, detti generalmente (M), (in numero di m),

In ogni istante, gli individui offrono o domandano lavoro e servizi di beni (H), domandano prodotti (M) ed offrono o domandano finanziamenti, ossia offrono nuovi prestiti o rimborsi, oppure domandano nuovi prestiti o rimborsi di finanziamenti già concessi. Le imprese domandano lavoro, servizi di beni (H) e beni (M), offrono prodotti finiti, e domandano finanziamenti o ne offrono il rimborso. I finanziamenti non hanno scadenza fissa. ma sono continuamente rimborsabili ed il saggio dell'interesse viene negoziato ad ogni momento sul mercato.

Considero prima l'equilibrio degli individui, poi quello delle imprese.

2. *L'equilibrio dinamico dei consumatori.* — Gli individui determinano, ad ogni stante, la loro condotta sul mercato in base ad un progetto, che si estende nel tempo e compiuto allo scopo di rendere

massima la totalità delle soddisfazioni, nell'intero corso previsto della loro esistenza. Essi prevedono le quantità di lavoro e di servizi dei beni (H) che possederanno nel futuro, le quote di profiitti che riceveranno dalle imprese ai cui risultati partecipano, il comportamento futuro dei prezzi e del soggio dell'interesse; e, mediaute questi elementi e l'importo presente dei finanziamenti, determinano le quantità di ogni bene e servizio da consumare e di finanziamenti da domandare o da offrire, nel corso della loro esistenza: cono le incognite del loro problema. I valori, che tali funzioni assumono nell'istante stesso in cui il progetto viene ideato, danno le quantità domandate e offerte, in quel momento, sul mercato. Contro i rischi e le incertezze dell'avvenire gli individui si garantisoono mediante valutazioni pessimistiche.

Indico con $p(t,\tau)$ e con $i(t,\tau)$, a meno di indici, i prezzi e il saggio dell'interesse previsti, all'istante t, da un dato soggetto economico, per il momento $\tau \geq t$, funzioni ciascuno dei rispettivi valori di mercato $p(t)$ e $i(t)$, e delle loro tendenze p' e i'. Deve essere: $p(t,\tau)(\tau = t) = p$ e $i(t,\tau)(\tau = t) = i$.

Siano $H_{0x}(t,\tau)$ e $H_{1x}(t,\tau),\ldots,H_{nx}(t,\tau)$, rispettivamente le quantità (per unità di tempo) di lavoro e degli h beni (H), che all'istante t, l'individno x prevede di possedere, per cause estranee allo scambio, all'istante $\tau \geq t$. Le corrispondenti quantità effettivamente possedute sono: $H_{jx}(t) = H_{jx}(t,\tau)(\tau = t)$, $(j = 0,\ldots,h)$. Siano poi $P_x(t)$ e $F_x(t,\tau)$ rispettivamente l'importo effettivo e quello previsto, all'istante t, dei finanziamenti di cui x risulta creditore o debitore. Infine $R_x(t,\tau)$ indichi l'importo previsto delle quote spettanti a x dei redditi delle imprese cui partecipa, funzione di $R_x(t)$, importo effettivamente riscosso, all'istante t, e della sua tendenza R'_x. Deve essere: $F_x(t,\tau)(\tau = t) = F_x$, $R_x(t,\tau)(\tau = t) = R_x$. Essendo:

$$U_x[t,\tau,C_{0x}(t,\tau),\ldots,C_{n+m,x}(t,\tau)],$$

il tasso totale d'utilità, previsto all'istante t per l'istante τ, in funzione delle quantità (previste) da consumarsi rispettivamente di lavoro, dei servizi degli h beni (H) e degli m beni (M), le equazioni dell'equilibrio dinamico degli individui sono:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{p_{jx}}\dfrac{\partial U_x}{\partial C_{jx}} = u_{0x}(t)\; e^{-\int_t^\tau i_x(t,v)\,dv} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad j = 0',\ldots,h+m, \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{h} p_{jx}(H_{jx} - C_{jx}) + i_x F_x + R_x - \sum_{j=h+1}^{k+m} p_{jx} C_{jx} - F'_x = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \tau = t, V_x, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x = I,\ldots,X, \end{cases}$$

in cui l'apice dell'ultimo termine indica la derivata parziale rispetto a τ, v_x, funzione di t, è il termine previsto della vita e X il numero degli individui. Occorrono poi le condizioni accessorie:

$$F_x(t, \tau)(\tau = t) = F_x, \; F(t, v_x) = 0.$$

Le prime $I + h + m$ equazioni sono le condizioni di equilibrio del consumo; l'ultima è il bilancio dell'entrata e della spesa.

Le circostanze psicologiche che conducono i consumatori ad una tale ripartizione nel tempo del consumo dei suoi mezzi, piuttostocchè ad una tal'altra, trovano tutte sintetica espressione nel comportamento della U_x rispetto a τ.

Risolto il sistema di equazioni e determinati i valori delle incognite (per $\tau = t, v_x$), i tassi effettivi dei consumi, all'istante t, sono:

$$C_{jx}(t) = C_{jx}(t, \tau)(\tau = t), \qquad j = 0, \ldots, h + m,$$

e l'offerta o la domanda di finanziamenti:

$$F'_x(t) = F'_x(t, \tau)(\tau = t),$$

nella seconda delle quali l'apice indichi la derivata rispetto a τ. La funzione storica dei finanziamenti $F_x(t)$ — dato del problema all'istante t — risulta dai finanziamenti F_{0x} esistenti all'origine de tempi t_0 e dalla condotta degli individui nell'intervallo t_0, t. È infatti:

$$F_x = F_{0x} + \int_{t_0}^{t} F'_x(v)\,dv \; .$$

E ora completo il sistema di equazioni dell'equilibrio dinamico e del moto storico delle economie di consumo. Ai fini dell'equilibrio generale terrò presente che le C_{jx} e le F'_x, attraverso le complesse soluzioni svolte ed i prezzi ed il saggio dell'interesse, previsti, che vi figurano, risultano funzioni dei prezzi e dell'interesse di mercato p_j e i e delle loro tendenze p'_j e i'.

3. *L'equilibrio dinamico delle imprese.* — Le imprese si procurano il lavoro, i servizi dei beni (H) ed i beni (M) occorrenti alla produzione, mediante il ricorso al prestito sul mercato dei finanziamenti, e li investono immediatamente, per cui non ne esistono giacenze. In ciascuna impresa la quantità di prodotto ottenuto ad un certo istante dipende dagli investimenti compiuti ad un momento passato, distante d'un intervallo pari alla durata della produzione. In tali ipotesi, i produttori determinano la misura degli investimenti, ad ogni istante, facendo conto del prezzo presente di mercato dei mezzi di produzione, dei prodotti che contano ritrarne, del prezzo che sperano ottenere, a

lavorazione terminata, dalla vendita del prodotto, e del saggio d'interesse (previsto) da pagare, nel corso del periodo produttivo, sull'importo dei prestiti occorrenti al finanziamento della produzione.

Sia b_i un fabbricante del prodotto i ($b_i = 1, \ldots, B_i$; $i = 1, \ldots, m$). Dalla condizione di massimo reddito (previsto), si deducono le seguenti equazioni determinanti gli investimenti d'impresa in funzione del tempo, t:

$$p_{bi} \frac{\partial y_{bi}}{\partial q_{j,bi}} = p_j \, e^{\int_t^{t+\omega bi} i_{bi}(t,v)\,dv}$$

$$j = 0, \ldots, h+m \, ,$$

in cui p_{bi} e y_{bi} sono il prezzo ed il tasso totale di produttività, previsti all'istante t per l'istante $t + \omega_{bi}$, $q_{j,bi}$ i tassi degli investimenti e ω_{bi} la durata della produzione, costante nel tempo. Queste equazioni significano che conviene impiegare, ad ogni istante, nuove quantità di ciascun mezzo di produzione fin quando il valore del prodotto, per unità di tempo e di mezzo, ottenuto dall'ultima dose (infinitesima) del mezzo stesso (è il valore del suo tasso marginale di produttività) non eguagli il montante del suo prezzo d'acquisto, riferito al termine della produzione.

Sono $1 + h + m$ equazioni atte a determinare gli altrettanti tassi d'investimento. Ai fini dell'equilibrio generale, terrò presente che le $q_{j,bi}$ risultano funzioni dei prezzi e del saggio d'interesse di mercato $p_j (j = 0, \ldots, h+m)$ e i, e delle loro tendenze $p_{,h+i}$ e i'.

Ad ogni istante gli investimenti compiuti ad un momento passato, distante d'un intervallo pari alla durata della produzione, danno i prodotti finiti. Il reddito, in funzione di t, è eguale al ricavo della vendita dei prodotti meno il loro costo, che è pari al prezzo d'acquisto dei beni che all'inizio della produzione furono investiti, aumentato degli interessi per la durata della produzione; è cioè:

$$R_{bi}(t) = p_{h+i} \, Y_{bi} - \sum_{j=0}^{h+n} p_j (t - \omega_{bi}) \, q_{j\ bi}(t - \omega_{bi}) \, e^{\int_{t-\omega bi}^{t-bi} i(v)\,dv}$$

in cui Y_{bi} è il tasso offettivo del prodotto ottenuto, all'istante t, dagli investimenti compiuti all'istante $t - \omega_{bi}$. Questo è il reddito d'impresa, ad ogni istante, che un apposito sistema di equazioni deve ripartire fra gli individui, determinando le R_x.

Ad ogni istante, le imprese acquistano mezzi di produzione, pagano interessi sui finanziamenti in corso (F_{bi}), ripartiscono il reddito fra gli individui partecipanti o ne ricevono i versamenti in caso di perdita, realizzano, infine, con la vendita il prezzo dei prodotti finiti; l'eccedenza delle uscite sulle entrate esse coprono mediante nuovi finanziamenti, se positiva, o rimborsano, se negativa ($F'_{bi} \gtrless 0$). Una

nuova equazione, rappresentante il bilancio finanziario, completa il sistema di equazioni dell' equilibrio dinamico delle imprese:

$$F'_{bi} = \sum_{j=0}^{h+m} p_j q_{j,bi} + i F_{bi} + R_{bi} - p_{n+i} Y_{bi}.$$

4. *Le equazioni dell' equilibrio dinamico generale.* — Queste equazioni, rappresentanti l'eguaglianza, ad ogni istante, della domanda e dell'offerta di ogni bene e servizio e dei finanziamenti sono:

$$\sum_{x=1}^{x} (H_{jx} - C_{jx}) - \sum_{tj=1}^{m} \left(\sum_{bi=1}^{bi} q_{j,bi} \right)_j = 0, \quad j = 0, \ldots, h;$$

$$\sum_{bi=1}^{bi} Y_{bi} - \sum_{x=1}^{x} C_{jx} - \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{bi=1}^{bi} q_{j,bi} \right)_j = 0, \quad j = h+I, \ldots, h+m;$$

$$\sum_{x=1}^{x} F'_x - \sum_{t=1}^{m} \left(\sum_{bi=1}^{bi} F'_{bi} \right) = 0.$$

Sono $I+h+m+1$ equazioni occorrenti a determinare gli $I+h+m$ prezzi $p_0 \ldots, p_{h+m}$, ed il saggio dell' interesse, i.

5. *Alcune estensioni della teoria.* — In diverse estensioni considero, fra l'altro, le « elargizioni » (donazioni, lasciti ereditari e simili), uno schema più complesso della produzione e l'esistenza di strumenti e di beni perpetui suscettibili di produzione e di scambio.

Do un cenno delle estensioni riguardanti i beni perpetui e gli strumenti. Se i beni (H) sono perpetui e suscettibili di scambio, gli individui devono determinare le quantità di tali beni che conviene loro possedere ad ogni istante del progetto esteso all'intervallo t, V_x, allo scopo di goderne i servizi o di cederli a scopo di lucro. Le H_{jx} sono h nuove incognite determinate per mezzo delle seguenti nuove equazioni:

$$\frac{(p_{jx} - \frac{\partial M_x}{\partial H_{jx}}) + P'_{jx}}{P_{jx}} = i_x \qquad j = 1, \ldots, h,$$

in cui $P_{jx}(t, \tau)$ è il prezzo del bene perpetuo j, previsto all' istante t per l'istante τ, P'_{jx} la sua derivata rispetto a τ, e $M_x(t, \tau, H_{1x}, \ldots, H_{hx})$ la spesa totale che x prevede all' istante t di dover sostenere all'istante τ, in funzione delle quantità a questo momento possedute dei singoli beni. Le quantità effettivamente possedute e quelle acquistate o vendute, all'istante t, sono rispettivamente:

$$H_{jx}(t) = H_{jx}(t, \tau)\,(\tau = t) \qquad \text{e} \qquad H_{jx}.$$

Passo ad accennare all'estensione riguardante gli strumenti. Suppongo che questi beni siano utilizzabili anche per frazioni infinitesime e che diano un flusso rigido di servizi di durata costante, diverso da individuo a individuo (σ_{ux}) e da impresa a impresa ($\sigma_{u,bi}$); non si scambiano strumenti usati, nè servizi di strumenti. Indico con $P_{ux}(t,\tau)$, $P_{u,bi}(t,\tau)$ e con $S_{ux}(t,\tau)$, $S_{u,bi}(t,\tau)$ rispettivamente i prezzi previsti e le quantità previste di possedere, dello strumento u, all'istante t per l'istante τ, da parte di individui e imprese ($u=1,\dots,s$), tenuto conto degli acquisti da farsi e dei logoramenti.

La condizione di massima utilità, estesa all'intera durata dell'esistenza, fornisce le seguenti equazioni nell'equilibrio dei consumatori:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{P_{ux}}\displaystyle\int_{\tau}^{\tau+\sigma_{ux}} \frac{\partial U_x}{\partial S_{ux}(t,v)}\,dv = u_{ox}(t)\,e^{-\int_t^{\tau} i_x(t,v)\,dv} \\ \qquad\qquad t \le \tau \le v_x - \sigma_{ux}\,, \\ \dfrac{1}{P_{ux}}\displaystyle\int_{\tau}^{v_x} \frac{\partial U_x}{\partial S_{ux}(t,v)}\,dv = u_{ox}(t)\,e^{-\int_t^{\tau} i_x(t,v)\,dv} \\ \qquad\qquad v_x - \sigma_{ux} \le \tau \le v_x\,, \\ \qquad\qquad\qquad u = 1,\dots,s\,, \\ \qquad\qquad\qquad u = 1,\dots,X\,. \end{cases}$$

Queste equazioni rappresentano l'eguaglianza, ad ogni istante del progetto dei consumatori, dei tassi marginali ponderati d'utilità degli strumenti con i tassi marginali ponderati di ogni altro bene e servizio.

Nel caso degli strumenti i produttori devono ideare un progetto degli investimenti di ogni mezzo produttivo, compresi gli strumenti, esteso all'intero corso, previsto, della vita dell'impresa $\tau = t, v_{bi}(t)$. I valori che le funzioni di tali investimenti assumono all'immediato presente, per $\tau = t$, determinano la domanda dei mezzi di produzione, strumenti inclusi, in funzione di t. La condizione di massimo reddito nell'intero intervallo t, v_{bi}, fornisce, fra le altre, le seguenti equazioni riguardanti gli strumenti:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\tau}^{\tau+\sigma_{u,bi}} p_{b+i,bi}(t, v+\omega_{bi}) \frac{\partial Y_{bi}}{\partial S_{u,bi}(t,v)}\, e^{-\int_{\tau}^{v+\omega_{bi}} i_x(t,\mu)\,d\mu}\, dv = P_{u,bi}\,, \\ \qquad\qquad t \le \tau \le v_{bi} - \omega_{bi} - \sigma_{u,bi}\,, \\ \displaystyle\int_{\tau}^{v_{bi}-\omega_{bi}} p_{b+i,bi}(t, v+\omega_{bi}) \frac{\partial Y_{bi}}{\partial S_{u,bi}(t,v)}\, e^{-\int_{\tau}^{v+\omega_{bi}} i_{bi}(t,\mu)\,d\mu}\, dv = P_{u,bi}\,, \\ \qquad\qquad v_{bi} - \omega_{bi} - \sigma_{u,bi} \le \tau \le v_{bi} - \omega_{bi}\,, \\ \qquad\qquad\qquad u = 1,\dots,s\,, \\ \qquad\qquad\qquad bi = b_i = 1,\dots,B_i\,, \\ \qquad\qquad\qquad i = 1,\dots,m\,; \end{cases}$$

in cui Y_{bi} è funzione anche di τ. Queste equazioni rappresentano l'eguaglianza, ad ogni istante del progetto delle imprese, del valore del tasso marginale di produttività di ciascuno strumento con il suo prezzo di mercato a quello stesso istante.

Nell'equazione del reddito d'impresa la quota di costo degli strumenti da imputare ai prodotti dipende dal criterio d'ammortamento adottato. Nel bilancio finanziario bisogna introdurre una nuova voce di spesa: quella per l'acquisto degli strumenti.

Nell'equilibrio generale bisogna introdurre le equazioni indicanti l'eguaglianza, ad ogni istante, della domanda e dell'offerta di questi beni.

6. *Teoria dinamica.* — La teoria oggetto della presente comunicazione, nonostante il quadro della realtà grandemente semplificato su cui è costruita, è teoria profondamente dinamica: il sistema economico è rappresentato nella continuità del suo divenire; da una posizione iniziale si passa attraverso una serie continua di variazioni a posizioni successive, nelle quali consiste il moto storico del sistema; non posizioni distinte, ma la successione continua delle posizioni: l'intera legge d'un movimento che non ha soste, nè interruzioni.

L'equilibrio dinamico non è un equilibrio tendenziale, non è un assetto verso cui si muove il sistema economico ed a cui finirebbe per pervenire in un periodo più o meno lungo di tempo, ove fossero verificate certe condizioni, non è equilibrio effettivamente raggiunto. Questo è il principio fondamentale della teoria svolta. Conseguentemente, il moto del sistema economico è successione di posizioni effettivamente assunte, non di configurazioni medie o normali intorno a cui oscillino le sue configurazioni concrete: per questo lo chiamo storico.

Dai cenni dati appare la importanza decisiva delle previsioni, che individui e imprese fanne ad ogni istante, sull'equilibrio a quello stesso istante; appare inoltre come, nelle imprese, le condizioni di eguaglianza, al margine, del costo e del ricavo, nelle diverse forme in cui possono esprimersi, non devono essere necessariamente verificate che nei rispettivi preventivi di lavorazione.

Le incognite degli equilibri singoli di individui ed imprese e quelle delle equazioni generali sono le forze « risultanti » dell'equilibrio dinamico; tutti gli altri elementi ne sono le forze vive: forze motrici, vincoli, resistenze. Alcune forze vive sono funzioni semplici del tempo, altre invece sono funzioni evolutive del tempo, ossia si vanno formando, nella loro misura quantitativa, attraverso il movimento percorso dal sistema economico.

Nel moto storico anche le forze evolutive sono risultanti: le sue

forze vive sono soltanto le funzioni semplici del tempo e i valori conosciuti all'origine dei tempi.

Attraverso le forze evolutive, l' assetto del sistema economico, ad ogni istante, dipende dal passato e a sua volta condiziona il futuro.

Ciò nonostante la teoria non rappresenta la vita economica secondo una concezione deterministica, per cui il presente risulti rigorosamente determinato dal passato, perchè nel moto del mondo economico sempre nuovi fatti intervengono, nuove forze vive, che il tempo reca immancabilmente con sè, e che sono, alcuni, il portato del caso e dell'imponderabile, altri l'elemento di libertà immanente nello spirito umano.

Il nuovo si ritrova sopratutto nelle valutazioni edonistiche dei consumatori, nelle leggi della tecnica, nei prezzi previsti. In funzione del tempo, in fatti, i tassi d' utilità rappresentano il modificarsi dei gusti e della intensità dello spirito di previdenza; ed i tassi, previsti ed effettivi, di produttività i miglioramenti qualitativi e quantitativi del prodotto, per virtù delle abilità acquisite con l'esperienza, le innovazioni della tecnica delle lavorazioni, l' avvicendarsi della stagioni, insomma tutte le circostanze interne ed esterne della dinamica delle imprese, che si riflettono sui rendimenti industriali. Le funzioni dei prezzi previsti riassumono sinteticamente le sempre rinnovate valutazioni, da parte dei soggetti economici, dei complessi movimenti, dei complessi movimenti del mercato e l'alternarsi e il confondersi disordinato delle correnti di fiducia e sfiducia, sotto l'azione di ogni sorta di eventi, politici, sociali, metereologici.

Così, modificandosi incessantemente le forze evolutive, legate al passato, per l'apporto delle più recenti vicende, ed il nuovo irrompendo da ogni parte, sempre nuove configurazioni assume l'equilibrio dinamico ed il sistema economico non riposa mai in un dato assetto. Mutano gusti, bisogni e spirito di previdenza, variano quantità e distribuzione dei beni, si modificano i rapporti di debito e di credito ed i patrimoni, si evolvono le leggi della tecnica industriale, oscillano le speranze e i timori dell' avvenire: sempre nuovi prezzi si stabiliscono, nuovi mezzi si investono, nuove quantità si producono, si scambiano, si consumano.

Sugli errori delle parallassi trigonometriche e spettroscopiche

Nota del dott. **Tito Nicolini**

(presentata dal socio corr. L. Carnera nell'adunanza del dì 7 dicembre 1935 - XIV)

Sunto. — Con la pubblicazione del nuovo Catalogo di Schlesinger si sono riesaminate ed aggiornate le correzioni statistiche delle π_t, rese indispensabili dalla inevitabile soppressione dei valori piccolissimi e negativi. Si è mostrata non bene giustificabile la interpretazione di errori sistematici precedentemente data alle differenze medie $\pi_t - \pi_s$ per le successive ore di A. R. Si è infine eseguita una valutazione aggiornata dell'erroro probabile percentuale, cui sono soggette le π_s.

Il nuovo *General Catalogue of Stellar Parallaxes* di F. Schlesinger [1]) contiene oltre 3900 valori di parallassi trigonometriche, molti dei quali risultanti da più di una singola determinazione. Anche lasciando da parte le determinazioni spettroscopiche e dinamiche del catalogo stesso, si ha già un complesso notevolissimo di valori, discussi e ridotti ad un sistema omogeneo, come l'A. spiega nella prefazione.

In conseguenza non è inopportuna anzitutto una rapida revisione dei risultati di una nota pubblicata qualche anno fa [2]) e riferentesi al catalogo del 1924 dello Schlesinger. Naturalmente non è il caso di ripetere le cose dette in tale nota, alla quale ed alla bibliografia in essa citata si rinvia per particolari.

Qui è indispensabile almeno ricordare, che una curva empirica di frequenza subisce una certa dispersione se le misure delle quantità esaminate sono soggette ad errori accidentali: p. es. l'istogramma della fig. 1 ha subita una dispersione a causa degli errori inerenti alla determinazione delle parallassi. In molti casi si possono correggere i valori singoli, per una ricostruzione approssimata e senza gravi inconvenienti della vera distribuzione di frequenza, usando un artificio ideato da Eddington [3]), e la cui pratica applicazione può vedersi p. es. nella ricerca di cui alla nota [2]).

---

[1]) Yale University Observatory, 1935.

[2]) *Le parallassi trigonometriche delle stelle.* Pubbl. del R. Osserv. Astron. di Trieste, vol. II, N. 7.

[3]) *On a formula for correcting statistics,* etc. M. N., v. 73, p. 359.

Ma in altri casi, l'applicazione di queste correzioni statistiche può dare l'illusione di vincere qualche difficoltà, mentre effettivamente le correzioni stesse risultano quasi completamente arbitrarie; ciò che si può riconoscere ove un esame critico un po' guardingo non sia risparmiato all'apparenza di precisione di formole o procedimenti.

Passando direttamente al caso concreto, che qui interessa, la tav. I e la relativa rappresentazione grafica della fig. 1, danno la distribuzione delle parallassi (π) trigonometriche del catalogo di SCHLESINGER; i valori π sono espressi in millesimi di secondo d'arco. Il catalogo contiene altre 29 parallassi maggiori di 0″.200.

Per la parte del diagramma a sinistra del massimo, la dispersione è quasi totalmente provocata dagli errori, come risulta senz'al-

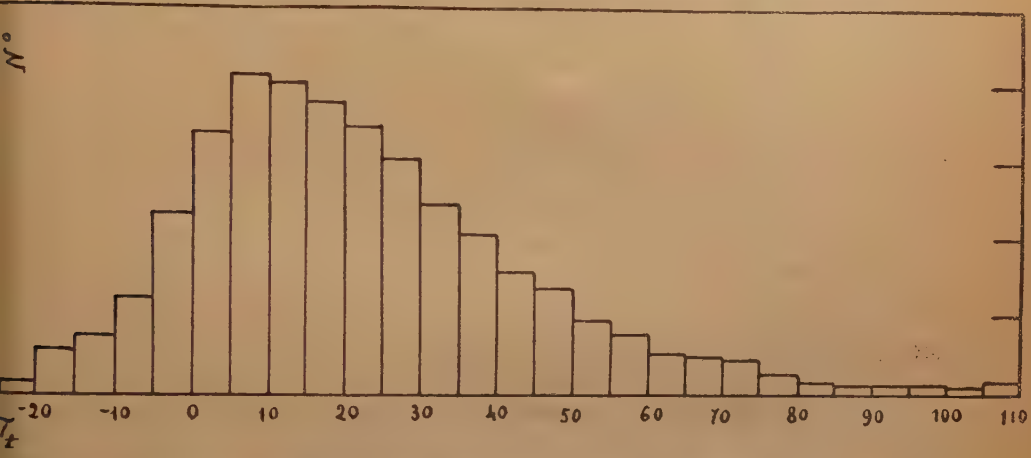


Fig. 1. — Frequenze delle parallassi trigonometriche del catalogo di SCHLESINGER.

tro dalla presenza di molte parallassi negative. La distribuzione degli errori probabili (ossia il numero di e. p. di ciascun determinato valore) è data dalla tav. II e dalla fig. 2, essendo anche gli e. p. espressi in unità 0″.001.

Per chi eseguisca il confronto, è ben evidente il progresso realizzato dal nuovo catalogo per rapporto al vecchio, non solo come numero di determinazioni, ma anche come precisione del complesso.

Si ammetterà facilmente, tralasciando facili giustificazioni, che invece di fare assegnamento sui valori singoli dell'e. p., conviene generalmente far uso della loro media 0″.0084. All'esame dei dati, risulta praticamente la stessa media per un intervallo qualsiasi di π; solo per le parallassi negative questa media degli e. p. è un po' superiore.

Volendo richiamare in breve la formola adottata nella nota citata [2]) per le correzioni, chiamiamo y la funzione di π rappresentata dalla fig. 1 (frequenza delle π), ρ l'e. p. adottato, σ la correzione delle

TAV. 1

Distribuzione delle π trigonometriche del catalogo di SCHLESINGER

π_t	N.°	π_t	N.°	π_t	N.°	π_t	N.°
— 39 a — 35	4	+ 21 a + 25	346	81 a 85	18	141 a 145	4
— 34 » — 30	4	26 » 30	305	86 » 90	12	146 » 150	4
— 29 » — 25	9	31 » 35	245	91 » 95	12	151 » 155	2
— 24 » — 20	16	36 » 40	206	96 » 100	12	156 » 160	4
— 19 » — 15	46	41 » 45	158	101 » 105	8	161 » 165	4
— 14 » — 10	64	46 » 50	137	106 » 110	13	166 » 170	4
— 9 » — 5	121	51 » 55	95	111 » 115	6	171 » 175	3
— 4 » 0	232	56 » 60	76	116 » 120	6	176 » 180	2
+ 1 » + 5	336	61 » 65	52	121 » 125	8	181 » 185	4
+ 6 » + 10	412	66 » 70	48	126 » 130	4	186 » 190	0
11 » 15	401	71 » 75	43	131 » 135	8	191 » 195	2
16 » 20	376	76 » 80	26	136 » 140	4	196 » 200	1

TAV. II

Distribuzione degli e. p. del catalogo di SCHLESINGER

E. p.	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
N.°	1	8	106	315	509	523	510	610	735	328	155	68	40	16	6

parallassi di un determinato valore π; si ha:

$$\sigma = \frac{\rho^2}{0.455} \cdot \frac{1}{y} \frac{\Delta y}{\Delta \pi} .$$

Per intervalli $\Delta\pi = 0''.005$, e $\rho = 0''.008$:

$$\sigma = 0''.03 \frac{\Delta y}{y} .$$

Ove si rifletta non superficialmente sulla questione, si comprenderà che l'applicaziane della correzione nella parte del diagramma a sinistra del massimo, e specialmente nella parte negativa è a ri-

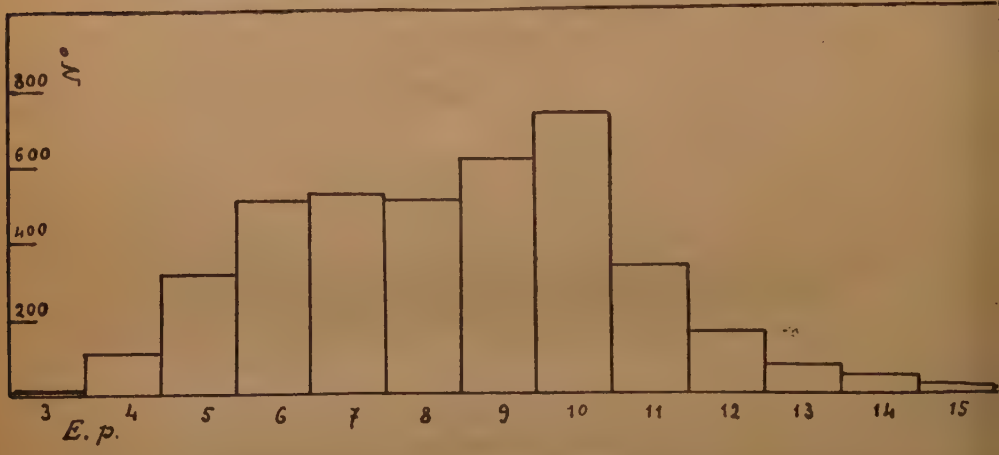


Fig. 2. — Frequenze degli e. p. relativi alle π_t del catalogo di SCHLESINGER.

sultato di utilità quanto mai dubbia, essendo la dispersione in questa parte, come si è detto, quasi totalmente provocata dagli errori. Si osservi che la correzione ha carattere approssimativo; che in ogni caso correzioni medie giuste non farebbero che addensare le parallassi piccole e negative in stretta prossimità dell'ordinata massima; e che per di più le particolarità accidentali della regione considerata ingenerano irrregolarità nelle correzioni tali, da saltare subito all'occhio. È quello che ognuno può provare per mezzo dei dati numerici forniti, e di cui sarebbe inutile dare qui la prova numerica.

Certamente un complesso di parallassi accurate molto più numeroso di quello oggi disponibile, permetterebbe avere anche per tale regione della distribuzione di frequenza delle correzioni medie non del tutto inutili. Ma allo stato attuale delle cose, se si voglia restare nell'ambito di pura considerazione di parallassi, sono da abbandonare i valori piccoli e negativi. Quindi, rinviando per altri particolari alla

ricerca di cui alla nota [2]) precedente, la seguente tav. III fornisce le correzioni che meritano considerazione [1]).

Nella tabella sono state attenuate le irregolarità dei risultati, e si è tenuto anche conto del fatto, che per le π_i maggiori, la media degli e. p. é un pò inferiore a 0″.008. Come si può osservare, le correzioni proposte qualche anno fa nella ricerca di cui alla nota [2]) precedente, nonostante ricavate da materiale più scarso ed incerto, sono tuttavia notevolmente vicine a quelle qui trovate, e che sembrano così anche da questo confronto, e in senso approssimativo, bene stabilite.

Un esempio tipico nel quale le correzioni sono indispensabili, è la ricerca delle grandezze assolute stellari, in cui come è ben noto si rende impossibile l'uso delle parallassi negative. D'altronde il trascurarle, assumendo quelle positive così come date, equivarrebbe a considerare un insieme di parallassi affetto in maniera sistematica da errori positivi in prevalenza. Cosicchè, in una ricerca di grandezze assolute, occorre in conformità di quanto detto abbandonare i valori piccoli e negativi di parallasse, ma è anche indispensabile ristabilire per così dire l'equilibrio tra gli errori, applicando le correzioni statistiche sopra considerate.

Si noti ancora bene la inopportunità di insistere nell'uso delle parallassi negative comunque corrette. In vicinanza del valore $\pi = 0''.000$ errori anche piccoli (in senso assoluto) delle π, hanno conseguenze notevoli; oggi una parallasse 0″.0001 o minore, non si può distinguere col metodo trigonometrico da una 0″.003. È inutile prendere in blocco tutte le π_i comprese p. es. tra $-0''.020$ e $-0''.015$ e trasformarle in $+0''.005$; a parte il fatto che nel migliore dei casi si otterrebbe un valore medio da usare con grande oculatezza, questo stesso valore medio si determina con non incoraggiante incertezza, come anche sopra detto; e quindi, trattandosi di valori non sufficientemente discosti da $\pi = 0''.000$, si comprende quanto sconveniente sia l'uso di parallassi piccole, o peggio negative comunque modificate, p. es. in una ricerca accurata sulle grandezze assolute.

Se i valori effettivi potessero essere indifferentemente positivi o negativi, un centinaio di determinazioni uguali 0.003 ± 0.010 darebbero come media 0.003 ± 0.001, risultato ancora magro, l'errore probabile esprimendo la uguale probabilità per la media effettiva di essere compresa nell'intervallo [0.002, 0.004] come di esserne fuori. Il caso complessivo delle parallassi sopra considerate inutili, è notevolmente

---

[1]) Anche i valori 0″.007 e 0″.008 possono essere considerati trasformandoli in 0″.008 o 0″.009; la media è da ritenere buona, ma siamo già sul limite, anche per valori superiori, per cui i valori singoli sono troppo incerti.

TAV. III

Correzioni statistiche da applicare alle parallassi trigonometriche

π_t	$\frac{\Delta y}{y}$	σ	π corr.	π_t	$\frac{\Delta y}{y}$	σ	π corr.	π_t	$\frac{\Delta y}{y}$	σ	π corr.
+ 0".010	— 0.02	— 0".001	+ 0".009	0".050	— 0.24	— 0".007	0".043	0".120	— 0.14	— 0".004	0".116
15	6	2	13	60	26	8	52	130	12	3	127
20	9	3	17	70	27	8	62	140	10	3	137
25	11	4	21	80	24	7	73	150	9	2	148
30	16	5	25	90	20	6	84	160	8	2	158
35	19	6	29	100	18	5	95	170	7	1	169
0".040	— 0.23	— 0".007	0".033	0".110	— 0.16	— 0".004	0".106	0".180	— 0.06	1	0".179

più sfavorevole, sia per considerazioni del genere di questa, sia per la necessità delle incerte correzioni statistiche.

Non v'è metodo che possa servire. Il tentativo stesso fornito dalla Mt, Wilson Contr. N. 473 è soggetto a questa osservazione; e tra i valori che hanno quivi servito alla determinazione delle grandezze assolute medie, molti avrebbero potuto più convenientemente essere abbandonati, non potendo essere nel migliore dei casi, più che inutile zavorra. Cosicchè tale ricerca, all'atto pratico non può rendere maggiore accuratezza di altre precedentemente pubblicate sull'argomento; nè, come l'A. sembra ritenere, alcune conclusioni possono ritenersi maggiormente confermate in conseguenza del procedimento seguito, pur analiticamente pregevole.

Un'altra questione d'una certa importanza, è quella dell'esistenza o meno di errori sistematici funzione dell'ascensione retta nelle parallassi trigonometriche. Più o meno buone ragioni possono essere addotte a previsione dell'esistenza di tali errori [1]); ma si tratta poi di sapere se i dati disponibili sono in grado di comprovare chiaramente la loro esistenza.

Considerando due serie indipendenti di misure di parallassi per le stesse stelle, certo per le varie ore di A. R. si riscontreranno differenze medie disuguali; è anche evidente, che queste differenze subiranno una certa regolarizzazione, se (come è stato fatto) in luogo di ciascuna si considera una media (ponderata, occorrendo) che tenga conto dei valori contigui.

Per evitare ripetizioni di vaste computazioni già accuratamente eseguite [2]), sono state qui indipendentemente riconsiderate tutte le differenze disponibili (oltre un migliaio) tra le sole π di Allegheny e le corrispondenti spettroscopiche, queste ultime potendo riguardarsi esenti da errorisistem atici dipendenti dall'A. R., come è generalmente ammesso. È da ricordare che i valori assunti sono quelli dati dal nuovo catalogo di Schlesinger, cosicchè le π_t sono ridotte al sistema di questo, mentre le spettroscopiche sono ridotte al sistema del Mt. Wilson. I risultati sono riportati dalla tav. IV e dalla fig. 3, le differenze essendo espresse in unità 0″.0001.

La media per tutte le ore di A. R. è -0″.0020, e ad essa corrisponde l'asse orizzontale X della fig. 3. Si domanda ora se le differenze computate diano indicazione di errori sistematici. In pratica, data la grandezza di queste differenze, dato l'importo degli errori accidentali, e il numero delle differenze, può venire il dubbio che

[1]) Mt Wilson Contr. N. 357, p. 4.

[2]) V. in particolare Mt W. Contr. N. 474.

TAV. IV

Medie delle differenze π_t di Allegheny meno π_s, in A. R., del catalogo di SCHLESINGER

A. R.	0^h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\overline{\pi_t - \pi_s}$	+ 19	− 3	− 34	− 13	− 32	− 41	+ 4	− 19	− 8	− 15	+ 34	− 5
A. R.	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
$\overline{\pi_t - \pi_s}$	− 32	+ 5	+ 11	− 19	− 29	− 33	− 28	− 33	− 67	− 49	− 57	− 47

questi errori accidentali siano sufficienti a spiegare le particolarità osservate, o che i pretesi errori sistematici non siano per lo meno abbastanza rilevanti da essere individuabili con qualche certezza dal complesso delle differenze disponibili. Qui si fa astrazione dalla persistenza dei segni negativi nelle suddette differenze $\pi_t - \pi_s$, non intendendosi discutere particolarità sulla compilazione di un catalogo

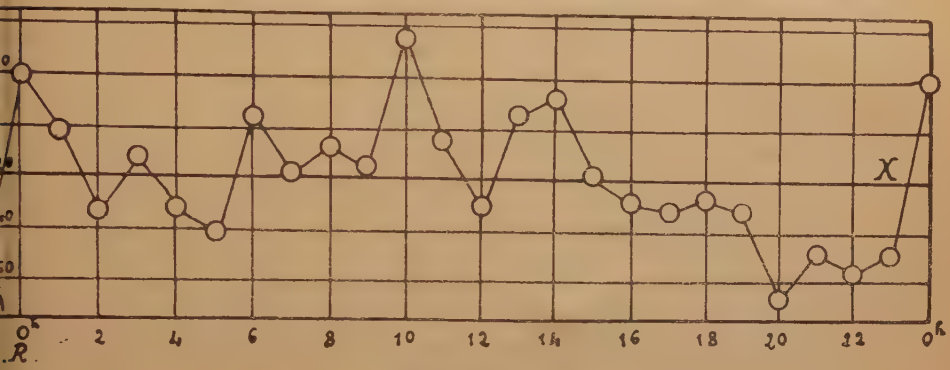


Fig. 3. — Differenze medie π_t ALLEGHENY meno π_s in funzione dell'A. R. (unità 0″.0001).

omogeneo di parallassi trigonometriche, o di parallassi spettroscopiche [1]), e si considerano semplicemente le deviazioni contate dall'asse X della fig. 3.

È noto a chi si occupi di parallassi, che l'e. p. di una generica determinazione per ALLEGHENY può assumersi circa 0″.009; una sommaria computazione per brevità non riprodotta (e che può farsi del resto coi dati della presente nota) basta a mostrare che l'e. p. di una differenza $\pi_t - \pi_s$ è, come indicazione media, prossima a 0″.010. Avendosi qui circa un migliaio di parallassi distribuite su 24^h di A. R., se ne deduce, che l'e. p. della media delle differenze per ciascuna singola ora di A. R. è circa 0″.0015. Uno sguardo alla fig. 3 è sufficiente a mostrare che la grandezza degli scarti rispetto alla retta X non è molto diversa da quella prevedibile dai soli errori accidentali con semplici considerazioni di probabilità. Se analogamente si esaminassero le forme di distribuzione di 12 differenze positive e 12 negative per le 24 ore di A. R., si concluderebbe che l'andamento probabile

---

[1]) Tuttavia è evidente che nell'interpretare effetti sistematici generali del tipo di quello sopra rilevato, occorre tener presente una non difficile trasposizione del complesso di determinazioni spettroscopiche (errore dello zero delle curve di calibrazione); come anche le possibili incertezze nelle riduzioni delle parallassi trigonometriche da relative ad assolute.

della distribuzione stessa, non è di tipo chiaramente diverso da quello osservato; non è il caso di insistere per quanto detto appresso.

Cosicchè sia l'entità degli scarti osservati, sia la loro distribuzione, non giustificano oggi correzioni sistematiche dipendenti dall'A. R.. Può essere che qualche debole indicazione sia presente, ma per lo meno il materiale parallattico disponibile non è sufficiente a dedurne l'importo numerico con qualche certezza, importo in ogni caso non rilevante. Il lieve dubbio che permane è solo per tener conto che l'e. p. medio fornito dall'accordo interno delle determinazioni Mc Cormick, è un po' inferiore a 0″.009.

Le presenti e più ampie considerazioni al riguardo erano già stabilite, quando si è presa cognizione di una accurata ed esauriente ricerca del Prof. Mitchell al riguardo dei pretesi errori sistematici formanti l'oggetto di questo paragrafo [1]). Questa ricerca, che giunge appunto alla conclusione sopra data, coi suoi ampi sviluppi e computazioni numeriche, rende superflua ogni ulteriore insistenza sull'argomento nella presente nota. Si è riportato quanto sopra, indipendentemente dall'A. citato, perchè ritenuto sufficiente a convincere della canclusione data.

Si avverte per scrupolo, che un tentativo di eliminare gli scarti $\pi_t - \pi_s$ numericamente maggiori, usando i soli valori $\pi < 0''.030$, non ha dato risultati essenzialmente diversi da quelli della fig. 3.

È noto come a differenza dalle parallassi trigonometriche, le spettroscopiche siano soggette ad errori accidentali dipendenti dalla loro grandezza. Generalmente parlando parallassi maggiori sono soggette a maggiori errori; precisamente è usuale esprimere l'errore medio, o l'errore probabile come, una frazione delle parallassi stesse, frazione che già da precedenti valutazioni si ritiene prossima al 20 % per l'errore probabile. Il nuovo catalogo di Schlesinger, comprendente oltre le π_t anche le spettroscopiche, compresa l'ultima vasta serie del Mt Wilson [2]), permette di avere una valutazione aggiornata di tali errori.

Il metodo seguito per questa determinazione, consiste anzitutto nel computare per ogni valore π_s tutte le differenze $\pi_s - \pi_t$ ottenibili dal catalogo. Qualche difficoltà, che si è riscontrata, sarebbe stata notevolmente aumentata se le $\pi_s - \pi_t$ fossero state considerate in cor-

---

[1]) *Systematic Errors of Parallaxes.* Publ. of L. Mc Cormick Obs., v. V, part XI. Si può ritenere la conclusione del ch. A. definitiva sull'argomento; almeno per evitare per parecchi anni opinioni e tentativi illusori.

[2]) Mt W. Contr. N. 511.

Calcolo dell' e. p. delle π_s, espresso in centesimi dei lavori delle medesime

π_s	n	$\frac{\Sigma v}{n}$	$v]$	r	r_1	$e=\sqrt{r^2-r_1^2}$	π_s	n	$\frac{\Sigma v}{n}$	$v]$	r	r_1	$e=\sqrt{r^2-r_1^2}$
0″.001	3	— 133	1000	345	840	—	0″.020	61	— 11	2840	47	42	20.8
2	11	— 295	4750	286	420	—	21	42	+ 12	2226	41	40	11.1
3	31	+ 72	4702	242	280	—	22	55	+ 6	2502	42	38	17.2
4	30	— 65	7400	166	210	—	23	51	+ 7	2437	38	37	11.0
5	39	+ 16	7080	160	168	—	24	61	+ 8	2440	39	35	16.4
6	66	— 35	8854	130	140	—	25	35	+ 23	1640	37	34	19.2
7	67	— 21	9614	113	120	—	26	56	+ 7	2319	36	32	15.8
8	80	0	9690	106	105	17.2	27-28	53	— 5	1961	31	31	7.3
9	75	0	8197	96	93	23.2	29-30	70	+ 13	2199	30	38	8.6
10	121	— 20	13040	89	84	31.0	31-32	55	+ 12	1958	28	27	8.6
11	76	— 21	7439	79	76	19.7	33-34	42	+ 8	1298	28	25	11.9
12	77	— 8	5528	71	70	14.6	35-36	51	+ 10	1567	25	24	7.6
13	86	0	7030	63	65	—	37-40	70	+ 8	1786	25	22	11.4
14	98	+ 2	6741	61	60	11.2	41-45	84	+ 5	2537	23	20	11.5
15	53	+ 7	3392	58	56	15.2	46-50	75	+ 11	1801	21	18	11.1
16	56	— 1	3974	56	52	21.0	51-60	83	+ 2	1561	19	15	11.0
17	74	— 2	4697	58	49	31.5	61-70	50	+ 6	1163	18	13	13.0
18	44	— 18	3132	57	46	32.5	71-80	40	+ 6	876	17	11	13.4
19	56	+ 7	3631	52	44	27.5	> 0″.080	123					10.6

rispondenza ai varî valori π_t anzichè π_s; infatti per le π_t negative, dette differenze sarebbero risultate tutte positive.

Supponendo, in corrispondenza ad una generica π_s (o ad un ristretto intervallo di π_s), le differenze $\pi_s - \pi_t$ distribuite in accordo alla legge degli errori, sia r il relativo scarto probabile percentuale: esso sarà prodotto dall'e. p. percentuale e effettivamente proprio delle determinazioni spettroscopiche, e dall'e. p. percentuale r_1 delle π_t. Evidentemente r_1 non è la media addietro considerata 0″.0084, ma corrisponde a $\frac{0''.0084}{\pi_s}$; così per $\pi = 0''.001$, r_1 sarà 8.40. Si potrà quindi valutare l'e. p. di una determinazione π_s in corrispondenza al generico valore π_s considerato, con la nota formola $e = \sqrt{r^2 - r_1^2}$. Naturalmente, come sopra detto, i residui v, i valori r, r_1, e, s'intendono espressi in centesimi del relativo valore π_s; allora r_1 è una costante per ogni singolo valore π_s (occorre non dimenticare la convenienza generale di usare la media degli errori 0″.0084, o se si vuole più esattamente 0″.00837, anzichè gli e. p. singoli). Le computazioni numeriche sono tutte eseguite tenendo questa via.

Dall'esame della distribuzione delle differenze $\pi_s - \pi_t$ in corrispondenza dei successivi valori π_s [1]), risulta che la assimilazione a curve d'errori non è troppo soddisfacente; risultano ancora parecchie differenze individuali rilevanti e non abbastanza simmetricamente distribuite. Perchè la determinazione dell'e. p. r non risulti in conseguenza eccessivamente influenzata, sarà adottata la nota formola di PETERS:

$$r = 0.845 \frac{v]}{\sqrt{n(n-1)}}$$

intendendo con $v]$ la somma dei valori assoluti delle differenze corrispondenti a ciascuna π_s ed n il numero di esse. La tav. V dà un riassunto delle computazioni numeriche eseguite. In essa i valori r ed r_1 sono approssimati con arrotondamento dell'ultima cifra, mentre gli e. p. cercati e sono calcolati con ulteriori due cifre in r ed r_1. Inoltre gli r dati sono le medie di tre in tre valori contigui; non si è potuto far meglio per eliminare alcuni imbarazzanti $r^2 - r_1^2$ negativi.

È evidente, ed è inutile spendervi troppe parole, che il ricavare una media dei valori e dà luogo a qualche difficoltà; la mancanza

---

[1]) Non si riproduce per brevità detta distribuzione, quantunque interessante anche oltre i limiti di questa ricerca, come vedesi p. es. dai valori $\frac{\Sigma v}{n}$ dati nella tav. V.

di alcuni di questi valori corrisponde a dispersioni delle differenze $\pi_s - \pi_t$ inferiori alle minime da attendersi (pel caso di π_s esatte).

Forse il miglior partito sarebbe di trascurare senz'altro le π_s da 0″.001 a 0″.007, e di considerare circa $e = o$ per $\pi_s = 0'.013$, venendo così a conteggiare questo e come uno dei valori da combinare insieme; vuol dire tutt'al più che qualcuna delle medie, che possono interessare potrebbe riuscire un po' accresciuta. La media di tutti i valori da 0″.008 compreso in poi dà 14.6; da 0″008 a 0″.080 risulta 15.7; da 0″.081 in poi 10.6; da 0″.008 a 0″.025 risulta 18.9. Ma la tabella sembra essere meglio sintetizzata dicendo che per π_s da 0″.008 a 0″.020 l'e. p. può valutarsi in genere a 20.4 %, mentre per $\pi_s > 0''.025$ a 11.2 % dei valori delle parallassi stesse. Nella intera estensione di ciascuna di queste due classi, le variazioni appariscono relativamente modeste.

Tuttavia, preferendolo, i risultati della tabella potrebbero combinarsi diversamente. E date le caratteristiche della distribuzione delle differenze $\pi_s - \pi_t$ in corrispondenza ai valori π_s, non potrebbe attribuirsi alle cifre riassuntive sopra riportate più che un valore di discreta approssimazione.

Terminando, ringrazio il Prof. L. Carnera che mi è stato cortese di interessamento durante la compilazione di questa nota.

Processo verbale dell'adunanza del dì 9 novembre 1935 - XIV.

All'adunanza, presieduta dal sen. De Lorenzo, assistono i soci ordinari Bakunin, del Pezzo, D'Erasmo (segretario), Diamare, Longo, Masoni, Pascal E., Pierantoni, i soci corrispondenti Andreoli, Carnera, Carrelli, Colamonico, Gallucci, Nobile, Quercigh e Ricci, e il Cancelliere della Società Reale avv. Imparato.

Il Presidente dice, che, chiamato dalla benevolenza di colleghi e dal beneplacito del Ministro a coprire l'ufficio di presidente, nell'iniziare in nome di S. M. il Re e col saluto al Duce il nuovo anno fascista dell'Accademia, propone di mandare un telegramma di ossequio a S. E. il Ministro, che in quest'ora storica della Patria regge così vigorosamente gli studi e l'educazione nazionale d'Italia. L'Accademia, unanime, si associa.

Il Presidente partecipa quindi la morte del socio Grassi, che apparteneva alla Sezione delle Scienze Naturali fin dal 20 febbraio 1897 e che verrà commemorato in altra adunanza dal socio corrispondente Carrelli.

Dà poscia notizia del Decreto presidenziale 8 ottobre 1935 - XIII, col quale i soci Pierantoni e D'Erasmo vengono nominati, per il triennio accademico 1935-38, rispettivamente Segretario della Società Reale e Segretario della R. Accademia delle Scienze Fisiche e matematiche. Comunica inoltre il passaggio del socio ordinario Quagliariello e dei soci corrispondenti Anile e Salvi alla R. Accademia di Scienze Mediche e Chirurgiche, mentre il socio Bottazzi ha optato per l'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche.

Quanto al nuovo Statuto e al relativo Regolamento, si aspettano le disposizioni che saranno al riguardo emanate da S. E. il Ministro.

Passando poi all'attività scientifica dell'Accademia, il Presidente ricorda le limitazioni per la carta e la stampa secondo le norme emanate da S. E. il Capo del Governo, e propone che si sospenda la pubblicazione degli Atti fino a nuovo ordine, ripigliando la stampa del solo Rendiconto, con i limiti e nei modi che saranno resi possibili dalle condizioni economiche dell'Accademia e del Paese.

Indi il Presidente comunica che il Cancelliere della Società Reale ha rinunziato ad ogni indennità, ed ha prestato, presta e presterà disinteressatamente l'efficace opera sua.

In seguito a proposta del presidente, l'Accademia unanime approva un voto di plauso e di ringraziamento al Presidente generale sen. Salvi per quanto ha fatto e sta facendo per la decorosa siste-

mazione dei locali della Società Reale, e specialmente della grande aula destinata alle adunanze plenarie.

Il socio corrispondente Ricci presenta una nota del dott. Guido Del Vecchio dal titolo: « *Generalizzazione della teoria statica degli archi piani a grande curvatura* », e ne riferisce, proponendone l'inserzione nel Rendiconto. L'Accademia unanime approva, lasciando a carico dell'Autore la spesa relativa alle figure intercalate.

Il socio corrispondente Andreoli presenta, per lo stesso Rendiconto, una sua nota dal titolo: « *Teoria generale di certi indici nei fenomeni statistici (endogamia, omogamia, diffusione* etc.) ».

Il socio corrispondente Carnera, dopo aver ricordato come per opera del prof. Arminio Nobile e del prof. Emanuele Fergola sia nato il problema delle variazioni delle latitudini, e come fin dal 1883 il prof. E. Fergola ebbe a proporre un'intesa internazionale per attuare tale studio, accenna al lavoro fatto posteriormente, e particolarmente all'opera delle stazioni internazionali, che fino al 1922, sotto la direzione e guida del Prof. Helmert, venne calcolata e discussa all'Istituto geodetico prussiano di Potsdam dai professori Albrecht e Wanach. Esclusi i tedeschi dopo la guerra da tutte le organizzazioni scientifiche di carattere internazionale, il lavoro passò al prof. Kimura, nel Giappone, universalmente noto come un profondo conoscitore dell'argomento. Recentemente avendo egli chiesto di essere sollevato dal carico, l'Unione Astronomica Internazionale, nell'ultimo suo Congresso tenuto a Parigi nel luglio scorso, decise di accogliere la domanda fatta dalla delegazione italiana affidando l'incarico all'Osservatorio di Capodimonte. S. E. il Ministro dell'Educazione Nazionale ed il Consiglio Nazionale delle Ricerche, edotti precedentemente della cosa, hanno assicurato il loro pieno appoggio; talchè a partire dal prossimo mese incomincerà a funzionare presso l'Osservatorio di Capodimonte, e precisamente là donde era partita la prima spinta a tali ricerche, il nuovo Ufficio centrale per il Servizio Internazionale delle latitudini, che dovrà attendere ai calcoli e alle discussioni delle osservazioni fatte nelle attuali otto stazioni distribuite su tre paralleli diversi.

Il Presidente, a nome dell'Accademia, ringrazia, compiacendosi col socio Carnera per la nuova attività dell'Osservatorio da lui diretto.

Processo verbale dell'adunanza del dì 7 dicembre 1935-XIV.

Assistono all'adunanza il presidente De Lorenzo, i soci ordinari Bakunin, Pierantoni, del Pezzo, D'Erasmo (segretario), Giordani, Longo, Marcolongo, Masoni, Pascal Ernesto, Scorza, e i soci corrispondenti Andreoli, Caccioppoli, Carnera, Colosi, Nobile, Quercigh e Rizzo.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 9 novembre, che viene approvato. Indi comunica:

1.°) i ringraziamenti di S. E. il Ministro dell'Educazione Nazionale per il telegramma inviato dall'Accademia all'inizio del nuovo anno fascista;

2.°) la circolare ministeriale 26 novembre, relativa alla sospensione, fino a nuovo ordine, di tutti i concorsi a premi banditi o da bandire. L'Accademia prende atto;

3.°) la circolare n.° 17 di S. E. il Ministro relativa al Congresso Internazionale di Roma per l'insegnamento tecnico. L'Accademia delibera di aderire al Congresso, facendosi rappresentare dai soci S. E. Giordani e signora Bakunin;

4.°) le nuove richieste di pubblicazioni da parte della Biblioteca provinciale « Gabriele d'Annunzio » di Pescara e del Museo Nazionale Ungherese (Sezione mineralogica e paleontologica). L'Accademia accorda il cambio del Rendiconto, a cominciare dall'anno corrente.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio vengono segnalate quelle offerte dal socio Cesàro. L'Accademia ringrazia il donatore.

Il socio D'Erasmo presenta, per il Rendiconto, una nota dell'ing. Giuseppe Ronza sopra *I giacimenti silexitici di Davoli e Satriano, in prov. di Catanzaro,* e una nota della prof. Maria Fiore su *Di un'alga fossile nuova per la « Pesciara » di Bolca,* proponendone l'inserzione. L'Accademia, con voto unanime, accoglie entrambe le note per la stampa nel Rendiconto.

Il socio Andreoli presenta, per il Rendiconto, una sua nota sopra una *Nuova teoria delle serie semplici e dei metodi di sommazione: il prodotto, l'assoluta convergenza e la teoria dei gruppi,* e una nota del dott. Giulio La Volpe, *Elementi per una teoria matematica dell'equilibrio economico dinamico,* che l'Accademia approva all'unanimità.

Il socio corrispondente Carnera presenta una nota del dott. Tito Nicolini dal titolo: *Sugli errori delle parallassi trigonometriche e spettroscopiche,* e ne riferisce proponendone l'inserzione nel Rendiconto. L'Accademia con voto unanime approva.

INDICE DEL VOLUME

G. D' Erasmo — Relazione dei lavori compiuti dalla R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche durante l'anno 1934 . . Pag. 3

M. Bakunin — Relazione sul concorso a premio Agostino Oglialoro-Todaro. . . . . » 7

M. Bakunin — Relazione della Commissione giudicatrice del concorso al premio accademico pel biennio 1933-34 . . . . » 7

G. Andreoli — Sulle metriche Cayleyane delle V_2 ed una terza geometria non euclidea . . . . . » 9

G. Colosi — Commemorazione del socio Antonio Della Valle . . » 14

G. Andreoli — Elementi per una geometria metrico-differenziale di una V_1 in una V_2 isotropa cayleyana . . . . . » 20

A. Colucci — Sulla derivata ennesima di un Wronskiano. . . . » 24

M. Viaro — Osservazioni del pianeta Saturno eseguite al R. Osservatorio di Capodimonte . . . . . » 29

G. Andreoli — Sulla topologia degli S_3 e la polidromia di intreccio . » 35

G. Gallucci — Su le curve razionali piane d' ordine n. . . . . » 40

G. Andreoli — Sugli indici di diffusione nei fenomeni statistici di ricambio sociale . . . . . » 43

C. L. Ricci — Precisazioni sul calcolo esatto delle tensioni tangenziali in un cilindro sollecitato a flessione, taglio e torsione . . » 50

G. Scorza — Le algebre del 4.° ordine (*Sunto della memoria inserita nel vol. XX degli Atti*) . . . . . » 60

G. De Lorenzo e G. D' Erasmo — Avanzi di ippopotamo nell'Italia meridionale (*Sunto della memoria inserita nel vol. XX degli Atti*) » 60

C. Carbonara — Affinità, trasformazioni cremoniane e gruppi automorfi delle algebre complesse del 3.° ordine dotate di modulo (*Sunto della memoria inserita nel vol. XX degli Atti*) . . » 60

G. B. Rizzo — Osservazioni meteorologiche raccolte nell' anno 1934 nell' Istituto di Fisica terrestre della R. Università di Napoli. » 61

Programma di concorso al premio accademico per il biennio 1935-36 . » 75

Programma di concorso al premio Sementini per il biennio 1935-36 . » 76

Programma di concorso al premio Gabriele e Ruggero Torelli . . » 77

Programma di concorso al premio Agostino Oglialoro-Todaro . . » 78

Processi verbali delle adunanze 5 e 12 gennaio, 2 e 9 febbraio, 2 e 9 marzo, 6 e 13 aprile, 4 maggio, 8 giugno 1935 . . . » 79

G. Del Vecchio — Generalizzazione della teoria statica degli archi piani a grande curvatura . . . . . » 189

G. Andreoli — Teoria generale di certi indici nei fenomeni statistici (endogamia, omogamia, diffusione etc.). . . . . » 108

G. Ronza — I giacimenti silexitici di Davoli e Satriano, in prov. di Catanzaro . . . . . » 125

M. Fiore — Di un' alga fossile nuova per la « Pesciara » di Bolca . . » 137

G. Andreoli — Nuova teoria delle serie semplici e dei metodi di sommazione: il prodotto, l'assoluta convergenza e la teoria dei gruppi . . . . . Pag. 139

G. La Volpe — Elementi per una teoria matematica dell'equilibrio economico dinamico . . . . . » 154

T. Nicolini — Sugli errori delle parallassi trigonometriche e spettroscopiche. . . . . » 162

Processi verbali delle adunanze 9 novembre e 7 dicembre 1935 . . » 176

Indice del volume . . . . . » 179

INDICE

G. Del Vecchio — Generalizzazione della teoria statica degli archi piani a grande curvatura . . . . . Pag. 89

G. Andreoli — Teoria generale di certi indici nei fenomeni statistici (endogamia, omogamia, diffusione etc.). . . . . » 108

G. Ronza — I giacimenti silexitici di Davoli e Satriano, in prov. di Catanzaro . . . . . » 125

M. Fiore — Di un'alga fossile nuova per la « Pesciara » di Bolca . . » 137

G. Andreoli — Nuova teoria delle serie semplici e dei metodi di sommazione: il prodotto, l'assoluta convergenza e la teoria dei gruppi . . . . . » 139

G. La Volpe — Elementi per una teoria matematica dell'equilibrio economico dinamico . . . . . » 154

T. Nicolini — Sugli errori delle parallassi trigonometriche e spettroscopiche. . . . . » 162

Processi verbali delle adunanze 9 novembre e 7 dicembre 1935 . . » 176

Indice del volume . . . . . » 179

La R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche della Società Reale di Napoli ha pubblicato recentemente la II edizione della MINERALOGIA VESUVIANA di Ferruccio Zambonini, a cura del prof. Emanuele Quercigh della R. Università di Napoli. Essa costituisce un volume in 4°, su carta a mano, di pagine 464, con 98 figure intercalate nel testo. Il prezzo di vendita è di lire 150.

Indirizzare le richieste, accompagnate dal relativo importo, al Segretario della Società Reale, prof. Umberto Pierantoni, via Mezzocannone, 8 — Napoli.

Redattore responsabile ai termini di legge: prof. U. PIERANTONI